

群馬高専 正員 山本好克

1. はじめに 統計・確率論に基礎をおく時系列モデルは、水資源系の計画あるいは管理に役立つ水文量の発生や将来予測などのいわゆるシミュレーションをする上で有用となる。さて、計画策定に当っては、その目的に応じて、年単位あるいは日、週、月、四季ほかの年単位以下の水文量が取り扱われる。年単位の水文時系列は、その確率過程をほぼ定常とみなすことができるが、年単位以下のそれは、年周期ほかが現われる非定常過程となっている。このような周期性水文時系列に対するモデルとして、周期性AR (Periodic Autoregressive) モデル、周期性ARMA (Periodic Autoregressive-Moving-Average) モデル、ARIMA (Autoregressive-Integrated-Moving Average) モデル、あるいは季節性 (Seasonal) ARIMA モデルなどが提案されている。

ここでは、月単位の水文時系列に対する周期性ARモデルに着目し、このモデルの一般的諸性質およびモデル化のための手法を考察すると同時に、適用例によりモデルの有用性について検討するものである。

2. 周期性AR(p)モデルについて 時間間隔 τ での V 年間の水文時系列 $X_{v,t}$ を正規化して $y_{v,t}$ とおきかえ、周期性AR(p)モデルの基本式は、次式で表わされる。 $y_{v,t} = \mu_t + \sigma_t Z_{v,t}$ --- (1), $Z_{v,t} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,t} Z_{v,t-j} + \epsilon_{v,t}$ --- (2) ここで、 μ_t , σ_t は $y_{v,t}$ の平均と標準偏差、 $Z_{v,t}$ は平均0、分散1の時間従属時系列、 $\phi_{j,t}$; $j=1, \dots, p$ は自己回帰係数、 $\epsilon_{v,t}$, $\epsilon_{v,t}^2$ は残差とその分散である。ただし $t=1, \dots, W$ (月数では $W=12$)、 $V=1, \dots, N$ (年数) である。なおモデルのパラメータは、 $\{\mu_t, \sigma_t, \phi_{1,t}, \dots, \phi_{p,t}, \epsilon_{v,t}\}; t=1, \dots, W\}$ である。上式の期待値と分散は次式となる。 $E(y_{v,t}) = \mu_t$ --- (3), $E(Z_{v,t}) = E(\epsilon_{v,t}) = 0$ --- (4), $Var(y_{v,t}) = \sigma_t^2$ --- (5), $Var(Z_{v,t}) = Var(\epsilon_{v,t}) = 1$ --- (6) また残差分散 $\epsilon_{v,t}^2$ は、式(2)の両辺に $Z_{v,t}$ を乗じて期待値をとると次式となる。

$\epsilon_{v,t}^2 = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j,t} \rho_{j,t}$ --- (7) さらにモデルの自己相関係数 $\rho_{k,t}$ は、式(2)の両辺に $Z_{v,t-k}$ を乗じて期待値をとると次式となる。 $\rho_{k,t} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,t} \rho_{k-j,t} - \delta_{j,t}$, $k > 0$ --- (8) ここで $\delta_{j,t} = \min(k, j)$, $\rho_{0,t} = 1$, k は遅れ時間である。

3. モデル化とその手順 月水文時系列データを用いて周期性AR過程にモデル化する手順のフローは、図-1のよう設定できよう。またこれらの内容の概略は、以下のようである。

(1) 正規性の検討 a) 月水文時系列データ $X_{v,t}$, $t=1, \dots, W$ の正規性を、歪み度検定あるいは χ^2 -検定により検討する。正規時系列であれば、 $y_{v,t} = X_{v,t}$ とする。

b) $X_{v,t}$ が非正規であれば、適当な手法にて正規化し、 $y_{v,t} = g_t(X_{v,t})$ とする。ここで、 $g_t(\cdot)$ は、正規変換関数である。

(2) 周期性の検討 a) $y_{v,t}$ の平均 $\bar{y}_t$ 、標準偏差 s_t および自己相関係数 $\rho_{k,t}(y)$ を次式より算出する。 $\bar{y}_t = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N y_{v,t}$ --- (9), $s_t = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{v=1}^N (y_{v,t} - \bar{y}_t)^2 \right]^{1/2}$ --- (10)

$\rho_{k,t}(y) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (y_{v,t} - \bar{y}_t)(y_{v,t-k} - \bar{y}_{t-k}) / (s_t \cdot s_{t-k})$ --- (11) ここで $t=1, \dots, W$, $k=1 \sim 3$

b) t について $\rho_{k,t}$ を図示し、一定係数のARモデルとするか(年水文量の場合と同一の取り扱いができる)、周期性係数の、すなわち周期性ARモデルとするかについて検討する。

(3) 次数の決定 a) 標準正規時系列 $Z_{v,t}$ を次式にて算出する。 $Z_{v,t} = (y_{v,t} - \hat{\mu}_t) / \hat{\sigma}_t$, $v=1, \dots, N$, $t=1, \dots, W$ --- (12) ここで $\hat{\mu}_t = \bar{y}_t$, $\hat{\sigma}_t = s_t$ である。b) $Z_{v,t}$ の自己相関係数 $\rho_{k,t}(Z)$ を式(11)にて算出する。c) t について $\rho_{k,t}$ を図示し、持続性が認められる遅れ時間 k 値を、次数 p とする。

(4) パラメータの推定 a) μ_t , σ_t を式(9), (10)により推定する。b) 周期性回帰係数 $\phi_{1,t}, \dots, \phi_{p,t}$ を、式(8)の $\rho_{k,t}$ を $\rho_{k,t}(Z)$ におきかえて推定する。c) $\hat{\phi}_{1,t}, \dots, \hat{\phi}_{p,t}$ の有意性を式(7)の正負において検討する。

(5) 適合性の検定 a) 推定されたモデルの残差 $\hat{\epsilon}_{v,t}$ を次式により算出する。なお初期値は、 $\hat{\epsilon}_{1,p+1}$ となる。 $\hat{\epsilon}_{v,t} = (1/\hat{\sigma}_t)(Z_{v,t} - \hat{\phi}_{1,t}Z_{v,t-1} - \dots - \hat{\phi}_{p,t}Z_{v,t-p})$ --- (13) b) $\hat{\epsilon}_{v,t}$ の無偏性を、Yerjevichによる境界相

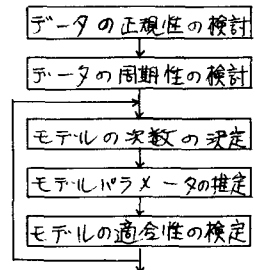


図-1 モデル化の手順

関係数により検定する。あるいは、 $\hat{\delta}_{v,t}$ を $\hat{\varepsilon}_t$, $t=1, \dots, (N-p)$ に置きかえて, Anderson test または, Port-Monteau lack of fit test を適用し検定する。c) $\hat{\delta}_{v,t}$ あるいは $\hat{\varepsilon}_t$ の正規性と, 歪み度検定あるいは χ^2 -検定により検定する。d) $\hat{\delta}_{v,t}$ または $\hat{\varepsilon}_t$ の独立性かつ/または正規性が満足されない場合は (3) にもどる。

4. 適用例 岩手県胆沢川の石端ダム(集水面積 154.4 km²)への月流入量データ(昭和29~51, 23年間)を用いて, 図-1の手順に従い, 周期性AR(p)モデルの確立を試みた結果は, 以下のごとくである。

(1) 正規性の検討および正規化

表-1 実測月流入量および対数化月流入量の月別歪み係数

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
実測値	1.037	1.832	0.268	0.228	0.790	1.856	0.447	0.479	1.166	0.888	0.274	0.823
対数値	0.885	0.888	-0.518	-0.421	-0.107	0.436	-0.768	-0.502	0.121	-0.126	-0.225	0.255

ダムへの月流入量データ $Z_{v,t}$ の月別歪み係数を算出した結果を表-1に示す。2, 6, 9月の歪み係数が大きくかつこれらは有意水準2%に対する歪み度検定値 $\delta_{0.02} = \pm 1.061$ をこえている。また12月間の平均値も0.841とかなり大きな値となっている。そこで, 実測値と対数変換し, 歪み係数を算出した結果は, 表-1のごとくである。各月とも検定値 $\delta_{0.02}$ の範囲内にあり, かつ平均値も -0.032 とほぼ0にみちめる値となっており, 対数変換値は正規時系列 $y_{v,t}$ であると言える。

(2) 周期性の検討 正規時系列 $y_{v,t}$ の平均 $\bar{y}_t$, 標準偏差 S_t , および自己相関係数 $r_{k,t}$, $k=1, 2, 3$ 式(9), (10), (11)より算出した結果を, 表-2に示す。また $r_{k,t}$ を図示すると図-1のごとくなる。

表および図より $r_{k,t}$ は, 月ごとのが

表-2 $\bar{y}_t, S_t$ および $r_{k,t}$

りの周期性が見られるので, ここでは周期性ARモデルを適用する。

(3) 次数の決定 式(12)より標準化された時系列 $Z_{v,t}$ の自己相関係数 $r_{k,t}$ は, 表-1と同一となる。表より,

$r_{k,t}$ (表) 値は, $k=1$ において 1, 2, 6, 8, 9月に持続性がみられるが, その他の月では小さな値となっている。また12月間の平均値は $\bar{r}_{12} = 0.251$ と小さい。そこでここでは, 周期性AR(0) およびAR(1)モデルを選定し, それらの適合性を比較検討する。

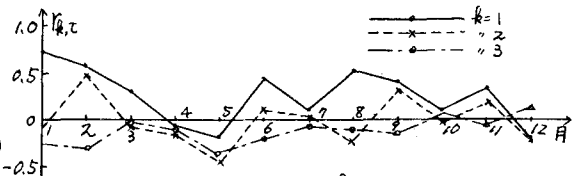


図-1 $r_{k,t}$; $k=1, 2, 3$

(4) パラメータの推定 式(13)よりAR(1)モデルの自己回帰係数 $\hat{\phi}_{1,t}$ を推定した結果と, この $\hat{\phi}_{1,t}$ の有意性を検討するための $\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_{1,t}}^2$ の値を式(7)にて算出した結果とを, 表-3に示す。表の $\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_{1,t}}^2$ の値より, 推定されたパラメータ $\hat{\phi}_{1,t}$ は, 有意であることがわかる。

表-3 $\hat{\phi}_{1,t}$ および $\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_{1,t}}^2$

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{\phi}_{1,t}$	0.711	0.544	0.317	0.086	-0.192	0.431	0.093	0.570	0.428	0.084	0.360	-0.194
$\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_{1,t}}^2$	0.494	0.682	0.899	0.993	0.963	0.814	0.991	0.740	0.817	0.916	0.884	0.966

(5) 適合性の検定 $\hat{\varepsilon}_t$, $t=1, \dots, (N-p)$ の独立性については, 有意水準5%のAnderson検定を, 正規性については, 有意水準2%の歪み度検定を行なった結果とを, 表-4に示す。表より, 石端ダムへの月流入量のシミュレーションモデルとしては, 周期性AR(1)モデルが適当であることがわかる。

表-4 $\hat{\varepsilon}_t$ の適合性検定

検定モデル	独立性 6.05値計算値	正規性 $\delta_{0.02}$ 値計算値
AR(0)	4.050	6.000
AR(1)	"	2.000

5. おわりに 周期性水文時系列のモデル化に当り, 周期性AR過程に着目し適用例により有用なモデルの選定を試みた訳であるが, 一層の有用性を見い出すためには, 選定されたモデルによるシミュレーション結果の検討あるいは他のモデルとの比較検討が必要となる。今後の課題としたい。

[参考文献] J.D. Salas, et al., "Applied Modeling of Hydrologic Time Series", WRP, 1980; J.D. Salas, et al., "Statistical Computer Programs in Hydrology", CSU, July, 1980,