

早稲田大学理工学部 学生員 ○葉崎 洋輔

早稲田大学理工学部 正員 依田 照彦

1. まえがき

カストロフー理論は破局の理論と訳され、突然変化する現象を主わめてわかりやすく分類、説明している。そのため、突然の変化のうちの1つである座屈現象も、カストロフー理論と結びつけて考えることができる。しかしカストロフー理論は、対象とするものの自由度が大きくなると形が複雑になってしまうので、座屈現象においても、剛体-バネモデル、オイラー座屈などの様な自由度の小さいものに適用している例が多い。そこで本論文では、集中荷重を受ける円弧スピンジアーチを連続体として解析し、系全体としてのカストロフーで表わせるのかということを検討する。

2. カストロフー理論

カストロフー (CATASTROPHE) 理論は、突然変化する現象を一貫して扱う数学的手法であり、従って対象は自然科学のみならず人文科学にも適用される。カストロフー理論の基本定理であるトムの定理を次に示す。¹⁾

トムの定理; 突然の変化 (CATASTROPHE) は、その系が構造安定ならば、その突然の変化は滑らかな座屈変換により、表1の様に分類される。ただし n はパラメータの数、 a, b, c, d はパラメータ、 x, y は変数である。

又、表1に示したもののうち、本論文に関係するものを図1, 2に示す。

表1. トムの分類定理 ($n \leq 4$)

n	F	名称
1	$\frac{x^3}{3} + ax$	折り目 (fold)
2	$\pm \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + bx$	くさび (cusp)
3	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{2}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$	つばねの尾 (swallow tail)
4	$\pm \frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{2}x^4 + \frac{b}{2}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx$	蝶 (butterfly)
3	$x^3 + y^3 + cx^2 - ax - by$	双曲的 ∇ (hyperbolic umbilic)
3	$\frac{1}{3}x^3 - x^2y + c(x^2y^2) - ax - by$	楕形的 ∇ (elliptic umbilic)
4	$x^3 \pm y^3 + ax^2 + by^2 + cx + dy$	放物的 ∇ (parabolic umbilic)

3. 解析

解析モデルとして図3に示すスピンジ用弧アーチを用いた。初期不整は偏心載荷を角度 ε として表わした。変位として角度を採用したのはカストロフー理論への適用を考慮したためである。ポテンシャルエネルギーを Q, Q_1, T, β で表わし、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用すると、Euler の方程式:

$$\begin{aligned}
 & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon) \\
 & \frac{d^4 \theta}{d\theta^4} + \bar{Q}_1 \left\{ \cos(\beta_1 + \theta - \frac{\pi}{4}) + R \left\{ \bar{T} \cos(2\beta_1 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \bar{Q}_1 \sin(2\beta_1 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right\} \right\} + \frac{R}{2} \left\{ (\bar{T}^2 - \bar{Q}_1^2) \sin(2\beta_1 \right. \\
 & \left. + 2\theta - \frac{\pi}{2}) - 2\bar{T}\bar{Q}_1 \cos(2\beta_1 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right\} + \bar{T} \left\{ -\sin(\beta_1 + \theta - \frac{\pi}{4}) \right. \\
 & \left. + R \left\{ -\bar{T} \sin(2\beta_1 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) + \bar{Q}_1 \cos(2\beta_1 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right\} \right\} = 0 \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

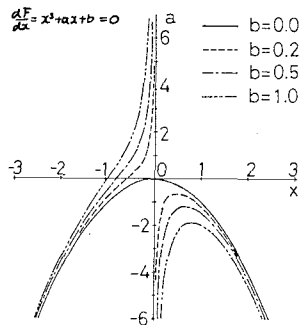


図1. CUSP CATASTROPHE

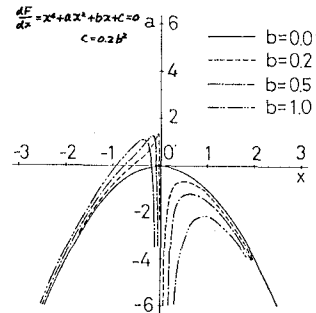


図2. SWALLOW TAIL CATASTROPHE

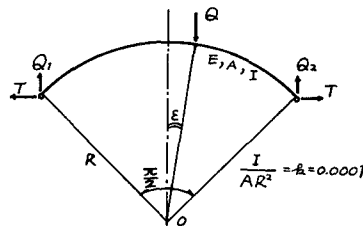


図3. 解析モデル

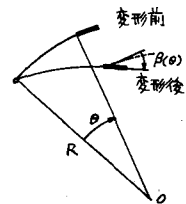


図4. 変形前後の状態

$$(\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d\beta}{d\theta} - \bar{Q}_2 \left\{ \cos(\beta_2 + \theta - \frac{\pi}{4}) + A \left\{ \tau \cos(2\beta_2 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) - \bar{Q}_2 \sin(2\beta_2 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right\} \right\} + \frac{A}{2} \left\{ (\tau^2 - \bar{Q}_2^2) \sin(2\beta_2 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) + 2\tau \bar{Q}_2 \cos(2\beta_2 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right\} + \tau \left\{ -\sin(\beta_2 + \theta - \frac{\pi}{4}) + A \left\{ -\tau \sin(2\beta_2 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) - \bar{Q}_2 \cos(2\beta_2 + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \right\} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_2 &= \frac{I}{AR^2}, \quad \varepsilon: \text{ヤング率}, I: \text{断面二次モーメント}, A: \text{断面積} \\ \bar{Q}_i &= \frac{R}{EI} Q_i \quad (i=1, 2), \quad \tau = \frac{R}{EI} T \\ \beta_i &\text{は載荷点の左側, } \beta_2 \text{は右側の角変位を表わす} \quad (1.b) \end{aligned} \right.$$

及び境界条件:

$$\frac{d\beta(0)}{d\theta} = \frac{d\beta(\frac{\pi}{2})}{d\theta} = 0 \quad (2)$$

及び連続条件:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) &= \beta(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \\ \frac{d\beta(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)}{d\theta} &= \frac{d\beta(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)}{d\theta} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

を得る。実際の解析においては、右端を可動ヒンジと考え、 $\beta(0)$, τ を仮定し右端の水平変位及び $\frac{d\beta(\frac{\pi}{2})}{d\theta}$ が 0 となる様な $\beta(0)$, τ を捜すという方法をとった。

4. 結果

解析による結果を図5及び図6に示した。これらの図はいずれも図2のつばめの尾のカタストロフィーに非常によく似ており、又その他の点における角変位 β も同様の形をしていることから、図3に示す系の座屈は、つばめの尾のカタストロフィーで説明できることがわかる。一方、再び図5, 6を見ると、座屈形式には①: 非対称型座屈(図7)及び②: 対称型座屈(図8)の2種類があることがわかる。①を含む曲線は荷重をのから増加させていくときに見られる曲線であり、②を含む曲線は図8を見ても明らかに通常の載荷では起こり得ない。よって通常の挙動は①を含む曲線で表わせるということができ、その曲線は図1のくさびのカタストロフィーにも現われている。このことは、

くさび及びつばめの尾のカタストロフィーが、

$$\left\{ \begin{aligned} \text{くさびのカタストロフィー;} & F = \pm \frac{1}{4} x^4 + \frac{a}{2} x^2 + bx \\ \text{つばめの尾のカタストロフィー;} & F = \frac{1}{2} x^5 + \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \end{aligned} \right. \quad (5) \quad (6)$$

で表わされ、これらの式における F , x はこの系ではそれぞれ全ポテンシャルエネルギー Π , 角変位 $\beta(0)$ に相当することから説明できる。つまり Π を初期不整のない場合の非対称型座屈点 ($\varepsilon=0$) における①でテーラー展開した場合、少なくとも5次項までを考慮すれば、その点の近傍の Equilibrium Path を完全に表わすことができ、又5次項を落としても、②を含む曲線の形が変わり解が1つ消えてしまうが、重要な①を含む Equilibrium Path は残されるということを示しているのである。この例からもわかる様にカタストロフィー理論によれば、テーラー展開の際第何項までを考慮すれば座屈現象を表わすことができるのかという問題を明確に説明することができる。

《参考文献》

1). ホーグステン, スネーワート, 野口広記: カタストロフィー理論とその応用, サイエンス社, 1980年。

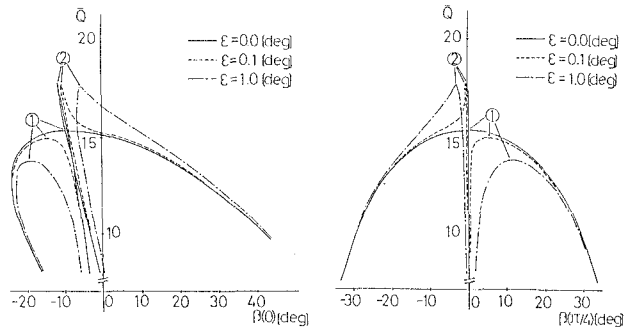


図5. $Q - \beta(0)$ 関係図

図6. $Q - \beta(\frac{\pi}{2})$ 関係図

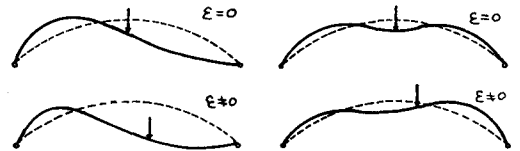


図7. 非対称型座屈

図8. 対称型座屈