Ｉ－19　　多種の作用荷重を受ける道路橋の破壊確率に関する一考察

○早稲田大学　学生員　根本　佳明
早稲田大学　正会員　依田　照彦

1．はじめに

確率論的概念の導入による、構造物の安全性，信頼性を検討する上で、その構造物の破壊確率を求めることは重要である。構造物の抵抗力をＲ，荷重効果をＳとする時、破壊確率 P_f は、$P_f = P[R < S]$ で表わされる。又、それぞれの確率密度関数を $\mathbb{R}(R)$，$\mathbb{S}(S)$ とすれば、$P_f = \int_0^{\infty}[\mathbb{S}(S) \times \int_0^{S} \mathbb{R}(R)dR]dS$ である。ＲもＳも共に、正規分布に従うならば、従来から言われている様に、２次モーメント法を使うことによって、$Z = R - S$ を変数とする新しい正規分布、$\mathbb{Z}(Z)$ を直ちに作ることができ、$P_f = \int_{-\infty}^{0} \mathbb{Z}(Z)dZ$ を求めればよい。ところが一般には、ＲもＳも幾つかの確率変数の関数になっている。これらは当然、全てが正規分布とは限らないので、２次モーメント法によって、一つの荷重効果としての分布 $\mathbb{S}(S)$ に合成することは、避けなければならない。本稿では、ＳもＲも幾つかの確率変数から成っている一般的な場合の、準備段階として、まず、Ｒは正規分布で、Ｓを指数分布と正規分布とに分けて検討を行なった。ここで、指数分布と正規分布を取り上げたのは、これら二つの分布が特に構造物の破壊に関して重要な、分布形の裾野において、長く尾を引く分布（道路における活荷重がこれにあたる[1]。）と、比較的早く収束する分布（死荷重や、材料に関する要因がこれにあたる[1) 2)]。）の代表と考えられるからである。以下、活荷重 $\mathbb{L}$ を指数分布、死荷重 $\mathbb{D}$、抵抗力 $\mathbb{R}$ をそれぞれ正規分布として、議論を進める。

2．指数分布と正規分布の合成

2－1　等価な正規分布に変換する方法

指数分布をそれと等価な正規分布に変換できれば、２次モーメント法により一つの分布に合成することができる。元の指数分布を、$\mathbb{L}_E(L) = \lambda \times e^{-\lambda(L-S_i)}$，これと等価な正規分布を、$\mathbb{L}_N(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_L} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L-\mu_L}{\sigma_L}\right)^2}$，抵抗力を、$\mathbb{R}_N(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_R} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\mu_R}{\sigma_R}\right)^2}$　とすると、等価な正規分布を使って、２次モーメント法により、$\mathbb{L}$ のみによる破壊確率、$P_{fN}(L,R)$ は求まる。この時、安全性指標、$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_L}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2}}$ ‥‥‥(1)　によって $P_{fN}(L,R)$ は決まるので、元の指数分布による、$P_{fE}(L,R)$ に対応する β に対して(1)式を満たす σ_L，μ_L ならば、どんな正規分布でも等価なものとなる。（図１参照）　ところで、Ｌ単独で等価な様に見える分布が、Ｄと合成した時も目標とする P_f を与えてくれるであろうか。死荷重を、$\mathbb{D}_N(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sigma_D} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{D-\mu_D}{\sigma_D}\right)^2}$　とすると、$\mathbb{L}$ と $\mathbb{D}$ を合成した時の、目標破壊確率、$P_f(S=L+D, R)$　を与える安全性指標Ｋは、$K = \frac{\beta \cdot \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2} - \mu_D}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2 + \sigma_D^2}}$ ‥‥(2)　となり、いくら(1)式を満足しても、μ_D，σ_D によって最終的な、$P_f(S,R)$ は変わってしまう。つまり指数分布と見なせる活荷重を、等価な正規分布に変換するには、それと合成する他の設計変数の状態によって、その正規分布のパラメーターを変化させなくてはならない。例えば、μ_D が σ_L に及ぼす影響を、図２に示す。破線（---）は、$\mathbb{L}$ と $\mathbb{D}$ を合成した時の、目標破壊確率を与える曲線である。つまり、破線（---）と交わった点の σ_L を用いないと、合成分布において、目標破壊確率は求まらない。

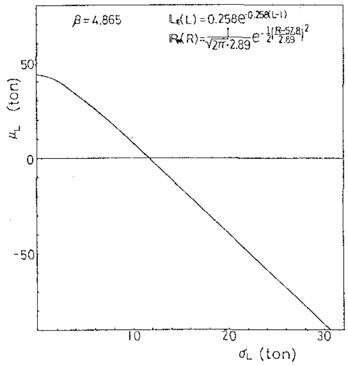

図１　$P_{f_E}(L,R) = P_{f_N}(L,R)$ なる正規分布のパラメーター

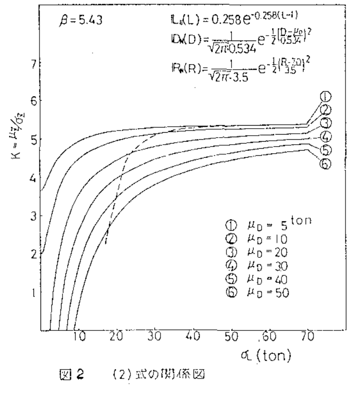

図２　(2)式の関係図

2－2　たたみこみ積分による方法

この方法が、いわば、最も理論的方法で、目標破壊確率を与えるものと考えられる。合成した荷重効果の分布を、$\mathbb{S}(S)$ とすれば、

$$\mathbb{S}(S)=\int_0^S \lambda\cdot e^{-\lambda(S-D-S_i)}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_D}\times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{D-\mu_D}{\sigma_D}\right)^2}dD$$

$$=\lambda\cdot e^{-\lambda(S-S_i-\mu_D-\frac{1}{2}\lambda\sigma_D^2)}\times\Phi\left(\frac{\mu_D+\lambda\sigma_D^2-S}{\sigma_D}\right)\quad\text{-----}(3)$$

ここに、$\Phi(x)=\int_x^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ，　図3の$\mathbb{L}$と$\mathbb{D}$をたたみこんで合成した$\mathbb{S}$が、図4である。

2－3　元の指数分布をシフトさせる方法

図3,4において構造物の破壊に影響を与える分布の裾野に注目すると、これは元の指数分布を、ある量だけシフトさせたものとほぼ一致することに気づく。このシフト量が合成前の正規分布と指数分布のパラメーターによって決定されるわけである。図5の様な合成された分布上の点（a,b）つまり（a,$\mathbb{S}$(a)）を通る様に、元の指数分布をシフトさせたい。但し、aは合成された分布において、極値より右側である。

$$a=\mathbb{S}^{-1}(b)\quad(\mathbb{S}^{-1}(S)\text{ は }\mathbb{S}(S)\text{ の逆関数})\quad\text{-----}(4)$$

$$S_i=\frac{1}{\lambda}\times\ln\frac{b}{\lambda}+\mathbb{S}^{-1}(b)\quad\text{-----}(5)$$

例えば、$b=\lambda$　とすると、$S_i=\mathbb{S}^{-1}(\lambda)$　となる。上の計算によって求めたシフト量だけ元の指数分布をシフトさせた時の破壊確率を、2-2による目標破壊確率と共に、表1に示した。両者の方法に大差はなく、正規分布と指数分布を合成した新しい分布は、構造物の破壊確率を求める上で、元の指数分布を、S_iだけシフトさせた指数分布と等価であるといえる。

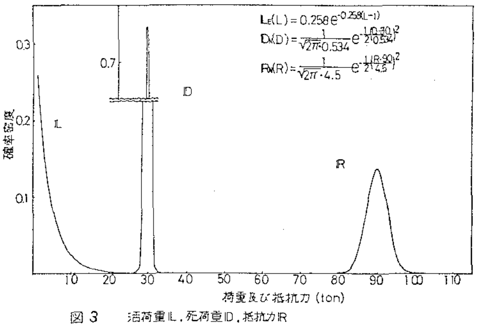

図3　活荷重$\mathbb{L}$，死荷重$\mathbb{D}$，抵抗力$\mathbb{R}$

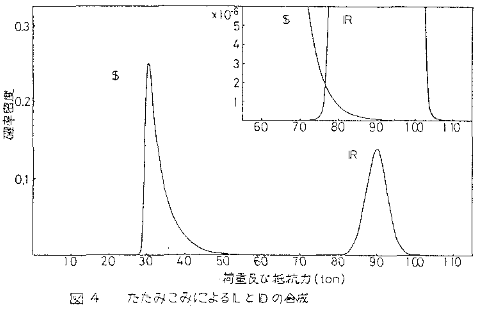

図4　たたみこみによる$\mathbb{L}$と$\mathbb{D}$の合成

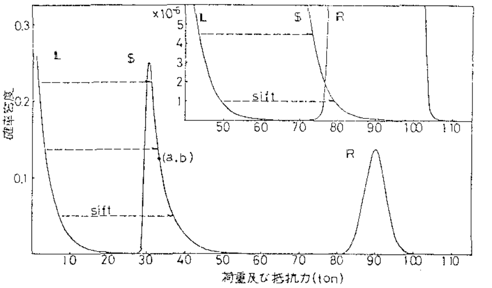

図5　合成分布$\mathbb{S}$と指数分布$\mathbb{L}$

3．今後の展望と問題点

多種の確率変数による分布を合成し、最終的に荷重効果$\mathbb{S}$と抵抗力$\mathbb{R}$にまとめなければ、P_fは求まらない。そのためには、全ての分布を裾野の尾を長く引く指数分布型と、早く収束する正規分布型に分けて、正規分布は正規分布どうしで２次モーメント法による合成を行ない、指数分布は指数分布どうしで積分計算による合成を行ない、最後に正規分布と指数分布になった所で、2-1～2-3 等の方法により合成すればよい。因に、指数分布と指数分布を合成した分布は、それらのパラメーターによってシフトされるが、その形状は指数分布となることはすぐにわかる。しかし、2-1において、等価な正規分布の見つけ方や、2-3における、シフト量の求め方等に、やや問題があり、たたみこみ積分による理論的合成分布が、わかった現時点では、それらの実用性に疑問が残る。

表 1　破壊確率P_fの比較

$\sigma_D=0.534^{ton}$　$\delta_R=0.05$

	2-2によるP_f	2-3によるP_f
$\lambda=0.1$ ton^{-1} $\mu_D=20$ ton $\mu_R=130$ ton	$S_i=0.5$ 0.218E-4	$S_i=20.4$ 0.215E-4
$\lambda=0.1$ $\mu_D=30$ $\mu_R=180$	$S_i=0.5$ 0.471E-6	$S_i=30.2$ 0.468E-6
$\lambda=0.1$ $\mu_D=50$ $\mu_R=200$	$S_i=0.5$ 0.536E-6	$S_i=50.3$ 0.520E-6
$\lambda=0.258$ $\mu_D=20$ $\mu_R=80$	$S_i=1.0$ 0.427E-6	$S_i=20.9$ 0.407E-6
$\lambda=0.258$ $\mu_D=30$ $\mu_R=90$	$S_i=1.0$ 0.449E-6	$S_i=30.6$ 0.434E-6
$\lambda=0.258$ $\mu_D=50$ $\mu_R=110$	$S_i=1.0$ 0.686E-6	$S_i=51.2$ 0.706E-6
$\lambda=0.4$ $\mu_D=20$ $\mu_R=70$	$S_i=2.0$ 0.128E-7	$S_i=22.6$ 0.155E-7
$\lambda=0.4$ $\mu_D=30$ $\mu_R=80$	$S_i=2.0$ 0.149E-7	$S_i=32.3$ 0.186E-7
$\lambda=0.4$ $\mu_D=70$ $\mu_R=110$	$S_i=2.0$ 0.819E-5	$S_i=52.5$ 0.959E-5

4．参考文献

1）禮場，前田，松井：旧神崎橋の破壊確率に対する一考察，第38回年講.
2）安全性信頼性総合研究班第２次報告：JSSC, VOL.17, NO.179, '81 2・3.