I－18　　混合法を用いた円筒パネルの有限変位解析

早稲田大学理工学部　学生会員　末武義崇
早稲田大学理工学部　正会員　平嶋政治
早稲田大学理工学部　正会員　依田照彦

〔1〕まえがき

曲線桁の解析にあたって、そのウェブの一部を円筒シェルパネルと見なして取り出し、解析するということがよく行われている。こうしたシェル構造の問題に対し、解析的には古くから多くの研究がなされており、中でもTimoshenkoの研究が有名である。[1] しかし、シェルパネルの問題を解析的に解く場合、例えばFourier級数等の級数展開によって解くような場合には、基底関数の決定が境界条件によっては必ずしも容易でなく、また基底関数によって表現される変位モードが現実の場合と一致する保証はない。これに対し、最近ではコンピューターの発達によって、有限要素法等の数値解析が有力な解析手段となっており、特に従来は、有限要素法の中でも主として変位法が用いられてきた。ところが、有限変位問題に対し、変位法は解の精度や収束性の点から問題が残されている。[2]

本報告では、要素自由度が小さく未知関数が少ないわりに比較的精度が良く、要素剛性マトリックスの定式化も容易な、Herrmannの混合法を用いて解析を行い、特に円筒シェルパネルが面内方向に対称分布荷重を受ける場合の圧縮座屈について調べてみた。

〔2〕要素剛性マトリックス

Herrmannは、図1.に示すような三角形平板要素に対する板曲げ要素剛性方程式を、Hellinger−Reissnerの変分原理から出発して導出し、次式のような良く知られた表示を得ている。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{H}^T \\ \mathbb{H} & -\mathbb{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbb{W} \\ \mathbb{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F} \\ -\boldsymbol{\Phi} \end{Bmatrix} \qquad ――(1)$$

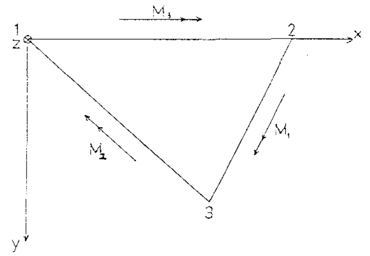


図1．三角形平板要素

ここに、$\mathbb{M}$は要素境界に沿う曲げモーメントで、$\mathbb{M}^T \equiv \{M_1\ M_2\ M_3\}$、$\mathbb{W}$及び$\mathbb{F}$は節点におけるたわみ及び$z$方向の集中力をそれぞれ表わし、$\boldsymbol{\Phi}$は要素境界の回転角の積分値を表わす。一方、和田・滝ら[3]は、仮想仕事の原理と相補仮想仕事の原理を組み合わせて、微小変形問題に対する、全く同様の板曲げ要素剛性方程式を得た。さらに和田・滝らは、有限変位解析のためにいわゆる増分法を考え、相補仮想仕事の原理と面内力$\mathbb{T}$の影響を考慮した仮想仕事の原理をもとに、増分剛性方程式として次式を導出した。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A} + \mathbb{C}' & \mathbb{b}^T\mathbb{H}^T \\ \mathbb{b}\mathbb{H} & -\mathbb{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\mathbb{r} \\ \Delta\mathbb{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbb{R} \\ -\Delta\boldsymbol{\Phi} \end{Bmatrix} \qquad ――(2)$$

ここに、$\mathbb{r}$及び$\mathbb{R}$は節点における$x$、$y$、$z$方向の変位及び荷重をそれぞれ表わし、$\Delta$は増分量であることを示す。さらに、$\mathbb{W} = \mathbb{b}\cdot\mathbb{r}$であることに注意する。また、式(2)において、$\mathbb{A}$は面内剛性マトリックスを、$\mathbb{C}'$は初期応力マトリックスをそれぞれ意味し、式(1)と比較してわかるように、この部分が有限変位問題における非線形性を表現しているわけである。尚、和田・滝らは初期応力マトリックス$\mathbb{C}'$を、荷重増分を加える前、即ち変形前の座標から計算し、荷重増分を各段階で修正して加えることによって誤差の処理をしているのに対し、本報告では計

算結果の変位増分を加えて得られる、変形後の座標から$C'$を求め、プログラムの改善を計った。

[3]円筒シェルパネルの解析結果

本報告では、図2に示すような、全辺単純支持（全辺曲げ及びz方向の変位を拘束）の円筒シェルパネルの上下に、対称な面内等分布荷重が作用した場合を解析対象としている。円筒シェルパネルの要素分割は、図3のように行い、数値計算に用いたパネルの寸法は図2のとうりである。尚、パネルの肉厚は、$t = 1.0$ [cm] とし、材料定数はYoung率$E = 2.1 \times 10^7$ [ton/m²]、Poisson 比$\nu = 0.3$とした。図4～図5に解析結果を示す。図4の$\sigma_e$は、文献4)の座屈値を用いた。また、図4の$w_0$は初期不整を示している。図4から明らかなように、円筒シェルパネルにおいては、かなり大きな後座屈強度を期待できる。このことは、面外方向に初期不整を与えた場合に言えることであって、内側に初期不整を与えた場合には、後座屈強度は期待できない。

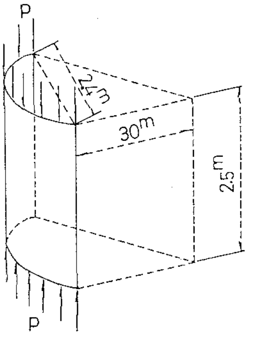


図2．円筒パネル

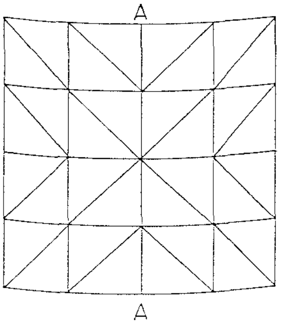


図3．パネルの有限要素分割

[4]まとめ

以上のことから、混合法による有限変位解析は要素自由度を小さくしても比較的精度の良い近似値を与えることが分った。その一例を図6に示した。すなわち、対称性のある問題について、混合法の定式化を行い、良く知られた浅い正方形キャップの飛び移り座屈現象の解析を行うと、厳密解と比べて充分妥当な近似解が得られる。このことは、本報告の混合法に基づく有限変位解析が妥当であることを表わしているだけでなく、実用価値の高い解析手法であることも示している。

尚、円筒パネルの有限変位問題に関する数値計算の詳細は、講演会当日に報告する予定である。

おわりに、数値計算は東京大学大型計算機センターのM－280Hを使用して行った。

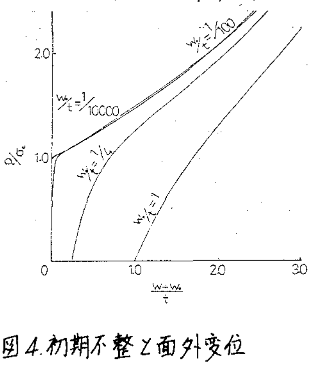


図4.初期不整と面外変位

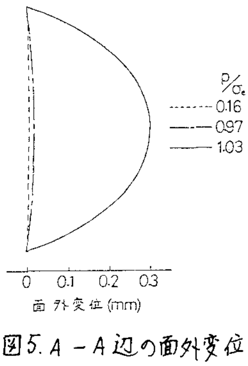


図5. A－A辺の面外変位

※参考文献

1) S. P. Timoshenko：弾性安定の理論，長谷川 節 訳，ブレイン図書.

2) 山田嘉昭 編：マトリックス法の応用，東京大学出版会.

3) 和田・滝，他：混合要素を用いた板、かくの増分法による幾何学的非線形解析，日本機械学会論文集，1980.

4) Tamate, O. & Sekine, H.：Postbuckling behavier of curved plate under compression, Trans. Japan Soc. Mech. Eng., Vol. 34, No. 265, pp. 1496～1501 (Sept., 1968).

5) 小野口，平嶋，依田：集中荷重を受ける曲線I桁の耐荷力について，第38回年次学術講演会講演概要集（第1部），土木学会，1983.

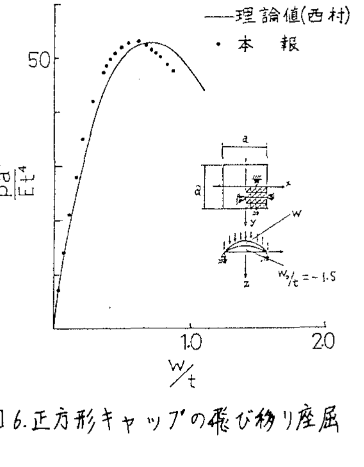


図6.正方形キャップの飛び移り座屈