

東京都立大学 正会員 野上 邦康

東京都立大学 正会員 伊藤 文人

1. まえがき

薄肉断面部材の有限変位理論に関しては、1970年代に入ってから多くの研究が報告されている。^{1)~4)} これらの研究は、理論展開において同じ仮定を用いているにもかかわらず誘導された変位行列に注目して見ると多少相違点がある。この相違の主な原因は、変位行列の誘導法の差にあるものと思われるが研究者としてこの違いは気になるところである。

ここでは、剛体の力学で用いられている Euler の角⁵⁾を利用して座標変換と行ない独自に変位行列を誘導し検討を行なっている。

2. 座標変換

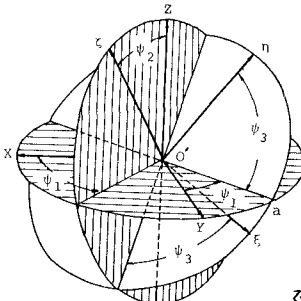
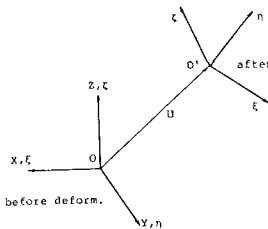


Fig.1 Coordinate systems Fig.2 Eulerian angles

いま、薄肉部材の断面圆心を原点 O とし、部材軸方向に z 軸を、断面に含まれる方向に x 軸、 y 軸を折って直交右手座標系を空間固定座標系 ($Oxyz$) とする。変形後の部材に固定した座標系を局所座標系 ($O'xyz$) と表わし、変形前においては空間固定座標系と局所座標系は一致しているものとする。(Fig.1)

変形にともない、局所座標系の原点 O' が空間固定座標系に対して $u = (u_0, v_0, w_0)$ だけ並進変位し、同時に部材軸の回転変位 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ が生じたものとする。ここで回転変位 ψ は Fig.2 のような剛体の力学の Euler の角を利用する。この時、局所座標系における任意点 (ξ, η, ζ) とその点の空間固定座標系における位置 (x, y, z) との関係は次式のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3 - \sin \psi_1 \sin \psi_3 \\ R_{12} &= -\cos \psi_1 \cos \psi_2 \sin \psi_3 - \sin \psi_1 \cos \psi_3 \\ R_{13} &= \cos \psi_1 \sin \psi_2 \\ R_{21} &= \sin \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3 + \cos \psi_1 \sin \psi_3 \\ R_{22} &= -\sin \psi_1 \cos \psi_2 \sin \psi_3 + \cos \psi_1 \cos \psi_3 \\ R_{23} &= \sin \psi_1 \sin \psi_2 \\ R_{31} &= -\sin \psi_2 \cos \psi_3 \\ R_{32} &= \sin \psi_2 \sin \psi_3 \\ R_{33} &= \cos \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$R_{13}^2 + R_{23}^2 + R_{33}^2 = 1 \quad (3)$$

Fig.2 において、ねじれの無い回転を考えたとし、 $\zeta=0$ なる平面内に座標系の回転軸が存在し、その回転軸は部材座標系の原点 O' を通る。さらにこの軸は z 軸と、原点 O' を通り z 軸と平行な直線とを含む平面に直交している。そのような回転軸上の点 P の部材座標は a をパラメータとして $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P) = (-a \sin \psi_1, a \cos \psi_1, 0)$ (4) と与えられる。この点の変位は部材座標原点の変位と等しいはずであるから次式が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式(2)と式(4)を式(5)に代入すると次の条件が得られる。

$$\sin(\psi_1 + \psi_3) = 0, \quad \cos(\psi_1 + \psi_3) = 1 \quad (6)$$

つまり、ねじれ角 φ は、次式のように定義できる。

$$\varphi = \psi_1 + \psi_3 \quad (7)$$

したがって、式(2)の座標変換は式(7)のねじれ角 φ を導入して変形し、 R_{13}, R_{23}, R_{33} を用いて他の行列要素の ψ_1, ψ_2 を消去すると次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= [1 - R_{13}^2 / (1 + R_{33})] \cos \varphi - [R_{13} R_{23} / (1 + R_{33})] \sin \varphi \\ R_{12} &= -[R_{13} R_{23} / (1 + R_{33})] \cos \varphi - [1 - R_{13}^2 / (1 + R_{33})] \sin \varphi \\ R_{21} &= [R_{13} R_{23} / (1 + R_{33})] \cos \varphi + [1 - R_{23}^2 / (1 + R_{33})] \sin \varphi \\ R_{22} &= [1 - R_{23}^2 / (1 + R_{33})] \cos \varphi + [R_{13} R_{23} / (1 + R_{33})] \sin \varphi \\ R_{31} &= -R_{13} \cos \varphi - R_{23} \sin \varphi \\ R_{32} &= -R_{23} \cos \varphi + R_{13} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. 変位成分表示

部材軸上の伸び変形とねじれ変形を扱うことにする。
いま、変形前における局所座標系の \$z\$ 軸(部材軸)上の点 \$S\$
(0, 0, \$a\$S)を考える。\$a\$S は微小であって原点とその点の間
で部材軸は直線であると見なせるものとする、この点
の変形後の空間固定座標系上の位置 (\$x_s, y_s, z_s\$) は、次式の
ように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_s &= u_0 + u'_0 aS \\ y_s &= v_0 + v'_0 aS \\ z_s &= w_0 + (1 + w'_0) aS \end{aligned} \right\} (9)$$

変形後の長さ \$a\$S とすると次式が成り立つ。

$$a\bar{S} = aS \sqrt{(1 + w'_0)^2 + v_0'^2 + u_0'^2} = (1 + \varepsilon_{20}) aS \quad (10)$$

ここで \$\varepsilon_{20}\$ は、軸ひずみ \$u\$ 次のような関係が得られる。

$$\varepsilon_{20} = w'_0 + \frac{1}{2}(u_0'^2 + v_0'^2) - \frac{1}{2}w'_0(w_0'^2 + u_0'^2 + v_0'^2) - \dots \quad (11)$$

また変形後のこの点 \$S\$ は、式(1)で表わすと

$$\left\{ \begin{aligned} x_s \\ y_s \\ z_s \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} 0 \\ 0 \\ a\bar{S} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となるので、式(12)に式(10)を代入し式(9)と比較する
と次のような関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_{13} &= u'_0 / (1 + \varepsilon_{20}) \\ R_{23} &= v'_0 / (1 + \varepsilon_{20}) \\ R_{33} &= (1 + w'_0) / (1 + \varepsilon_{20}) \end{aligned} \right\} (13)$$

次に、部材軸のねじれ変形によりそり変位 \$w_w\$ が生
じ、この変位がそり関数 \$\omega(\xi, \eta)\$ とねじれ率 \$\varphi^*\$ の積を
表わせるものとする。つまり、

$$w_w = -\omega \cdot \varphi^* \quad (14)$$

ねじれ率 \$\varphi^*\$ は、式(1)の座標変換を考慮すると

$$\varphi^* = \sum_i R_{i1} \cdot R_{i2} \quad (15)$$

で与えられる。ここに \$\eta\$ は \$z\$ 軸に関する微分を表わす。

したがって、式(15)に式(8)を代入するとねじれ率 \$\varphi^*\$
は次式のように与えることができる。

$$\varphi^* = \varphi' + (R_{13} R_{23} - R_{12} R_{33}) / (1 + R_{33}) \quad (16)$$

4. 変位行列

いま、変形前の部材座標を \$(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\$、変形後の同じ
点の部材座標を \$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\$ とすると、任意点の変位 (\$u, v, w\$)
は、式(1)より次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} u \\ v \\ w \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{aligned} \right\} - \left\{ \begin{aligned} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

変形後と部材の断面形状が保持されるものとし、さらに
そり変位 \$w_w\$ が生じるものとする

$$\xi_1 = \xi_0$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 \\ \zeta_1 &= \zeta_0 + w_w \end{aligned} \right\} (18)$$

を表わせるので、\$\zeta_0 = 0\$、\$\xi_0 = \xi\$、\$\eta_0 = \eta\$ と書くと、式
(17)は次式のように書直すことができる。

$$\left\{ \begin{aligned} u \\ v \\ w \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} R_{11}-1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22}-1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \xi \\ \eta \\ w_w \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この行列式は、式(13)、式(16)と式(8)で与えられる
厳密な変位行列である。

ところで、軸ひずみ \$\varepsilon_{20}\$ が微小ひずみの範囲、つまり、
\$\varepsilon_{20} \ll 1\$ にあるものとして式(3)と式(13)
より次のような近似式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_{13} &\approx u'_0 \\ R_{23} &\approx v'_0 \\ R_{33} &\approx 1 - \frac{1}{2}(u_0'^2 + v_0'^2) \end{aligned} \right\} (20)$$

また、式(16)のねじれ率 \$\varphi^{*'}\$ は、次式で与えられる。

$$\varphi^{*'} \approx \varphi' + \frac{1}{2}(u_0' v_0' - u_0' v_0'') \quad (21)$$

したがって、式(19)の厳密な変位行列は、式(19)
のねじれ角に関する \$\sin \varphi, \cos \varphi\$ の級数展開を行ない、
変位の 3 次以上の項を無視することにより次のような
近似変位行列になる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - \frac{1}{2}(\varphi'^2 + u_0'^2) \xi \\ &\quad - (\varphi' + \frac{1}{2}u_0' v_0') \eta - \omega u_0' \varphi' \\ v &= v_0 + (\varphi' - \frac{1}{2}u_0' v_0') \xi \\ &\quad - \frac{1}{2}(\varphi'^2 + v_0'^2) \eta - \omega v_0' \varphi' \\ w &= w_0 - (u_0' + v_0' \varphi') \xi \\ &\quad - (v_0' - u_0' \varphi') \eta - \omega \varphi^{*'} \end{aligned} \right\} (22)$$

5. 結論

薄肉断面部材の有限変位理論では、変位場の設定
が重要であるが実際には種々の精度レベルの変位行列が
見られる。ここでは Euler の方位角を利用し座標変換
および変位行列を誘導した訳であるが、微小ひずみ、
有限変位の範囲において式(19)は、厳密性の高い結果
を与えているものと思われる。また変位の 2 次項まで
考慮した近似変位行列である式(22)は、より一般性の
ある式になっている。

6. 文献

- 1) 西野・倉本長創・奥村：土橋会論文集 No. 225, 1974
- 2) 前田林：No. 253, 1976 3) 平嶋・井浦・依田：No. 292, 1979
- 4) 倉本・西野：No. 317, 1982 5) 原島：HJ, 炭華房