

III-11 圧密試験の自動化について(その1) — $e \sim \log p$ 曲線のスプライン関数による補間について

運輸省 港湾技術研究所 正員 ○土田 孝
" " " 小林 正樹

1. はじめに

土構造物の設計を行なう場合、圧密試験は、欠くことのできない重要な土質試験の一つである。通常、行なわれる標準圧密試験は、日本工業規格 JIS A 1217 に定められた方法によるもので、その試験には約15日の日数を要する。圧密試験の載荷、計測、データ整理が完全に自動化されるならば、その省力化の効果は大きいと考えられる。また、近年信頼性設計の考え方を土質工学にも取り入れようとする研究が盛んに進められているが、土質試験結果から個人の誤差をできるだけ取り除くことは、地盤の性質のばらつきを考慮する上で今後はいっそう必要になるであろう。ここでは、圧密試験の結果として最も重要な $e \sim \log p$ 曲線を、スプライン関数を用いて補間した例を報告する。

2. スプライン関数

通常、 $e \sim \log p$ 曲線は、雲形定規や自在定規によって描かれている。スプライン関数は、データ点の最もなめらかな補間を行なうため考案されたもので、いわば雲形定規や自在定規のかわりを数式的に行なっていることにあたる。

n 個のデータ点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられているとき、これらのデータ点を補間する関数で、与えられた n ($n < \infty$) に対して節点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をもつスプライン関数は次のように表わされる。

$$S(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^n C_i (x - x_i)_+^{2k-1} \quad (1)$$

ここで $P_{k-1}(x)$ は $k-1$ 次の多項式である。また、 $(x - x_i)_+^{2k-1}$ は切断べき関数とよばれるもので、

$$(x - x_i)_+^{2k-1} = \begin{cases} (x - x_i)^{2k-1} & (x > x_i) \\ 0 & (x \leq x_i) \end{cases} \quad (2)$$

である。 $S(x)$ は、与えられたデータ点 (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, n$) を補間するので、 $y_j = S(x_j)$ であるから、

$$P_{k-1}(x_j) + \sum_{i=1}^n C_i (x_j - x_i)_+^{2k-1} = y_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

である。また、スプライン関数の性質から、係数 C_i は、次の n 個の条件を満足しなければならない。

$$\sum_{i=1}^n C_i \cdot x_i^r = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, k-1) \quad (4)$$

①式の $S(x)$ は、多項式 $P_{k-1}(x)$ 中の k 個の係数と n 個の係数 C_i とを含んでいるが、③式および④式はこれら $(n+k)$ 個の未定係数に関する $(n+k)$ 元連立方程式である。したがって、③、④式の連立方程式を解くことにより、 $S(x)$ が一意に決まる。

3. 標準圧密試験の $e \sim \log p$ 曲線

標準圧密試験の圧密圧力は、通常 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4, 12.8 kgf/cm² の 8 段階である。そのおのおのについて圧密後の間げき比 e が求められるので、補間するデータ点は 8 点である。

①式で $k = 2$ として、 $e \sim \log p$ 曲線を 3 次のスプラインで補間する場合、補間は次のようになる。

$$S(\log p) = a_1 + a_2 \log p + C_1 (\log p - \log 0.1)_+^2 + C_2 (\log p - \log 0.2)_+^2 + \dots + C_8 (\log p - \log 12.8)_+^2 \quad (5)$$

また、③、④式より、 $a_1, a_2, C_1, C_2, \dots, C_8$ の計 10 個の未定係数に関する連立方程式は 10 次式となる。

$$\begin{pmatrix}
 1 & \log 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \log 0.2 & (\log 2)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \log 0.4 & (\log 4)^3 & (\log 2)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \log 0.8 & (\log 8)^3 & (\log 4)^3 & (\log 2)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \log 1.6 & (\log 16)^3 & (\log 8)^3 & (\log 4)^3 & (\log 2)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \log 3.2 & (\log 32)^3 & (\log 16)^3 & (\log 8)^3 & (\log 4)^3 & (\log 2)^3 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \log 6.4 & (\log 64)^3 & (\log 32)^3 & (\log 16)^3 & (\log 8)^3 & (\log 4)^3 & (\log 2)^3 & 0 & 0 \\
 1 & \log 12.8 & (\log 128)^3 & (\log 64)^3 & (\log 32)^3 & (\log 16)^3 & (\log 8)^3 & (\log 4)^3 & (\log 2)^3 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & \log 0.1 & \log 0.2 & \log 0.4 & \log 0.8 & \log 1.6 & \log 3.2 & \log 6.4 & \log 12.8
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4 \\
 C_5 \\
 C_6 \\
 C_7 \\
 C_8
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 e_{0.1} \\
 e_{0.2} \\
 e_{0.4} \\
 e_{0.8} \\
 e_{1.6} \\
 e_{3.2} \\
 e_{6.4} \\
 e_{12.8} \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix} \quad (6)$$

⑥式を解くことにより⑤式中の係数をすべて決定できる。

図-1は、以上の方法を用いて $e \sim \log p$ 曲線を補間した一例で、試料は大阪湾内の乱さない沖積粘土である。図のように $e \sim \log p$ 曲線は、なめらかに補間されている。

次に、補間曲線を用いて圧縮指数 C_c を求めてみる。 C_c は通常 $e \sim \log p$ 曲線の正規圧密部分における最急勾配として求められる。⑤式より曲線の勾配は、

$$\frac{\partial S(\log p)}{\partial (\log p)} = a_2 + 3C_1(\log p - \log 0.1)^2 + 3C_2(\log p - \log 0.2)^2 + \dots + 3C_8(\log p - \log 12.8)^2 \quad (7)$$

であり、⑦式の最小値を求めればよい。⑦式をさらに微分すると、

$$\frac{\partial^2 S(\log p)}{\partial^2 (\log p)} = 6C_1(\log p - \log 0.1) + \dots + 6C_2(\log p - \log 0.2) + \dots + 6C_8(\log p - \log 12.8) + \quad (8)$$

となるので、⑧式が0となる圧力 p における⑦式の値が C_c である。図-2は、以上の方法より求めた C_c と、熟練した技術者が通常の方法で求めた C_c とを比較したものである。データ数はやや少ないが、スプライン関数で補間した曲線から求めた C_c と、従来の方法で求められた C_c との差は小さい。

参考文献

スプライン関数入門；桜井明 東京電機大学出版局

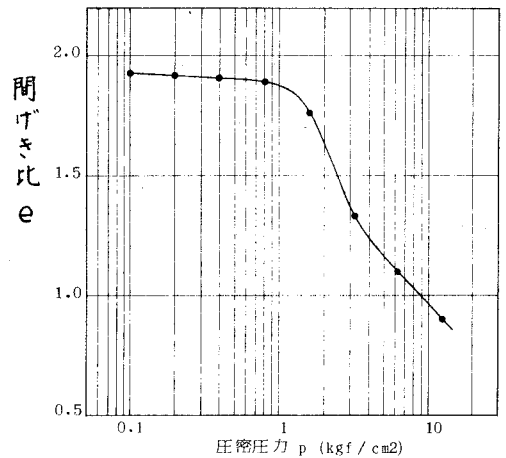


図-1 スプライン関数による補間

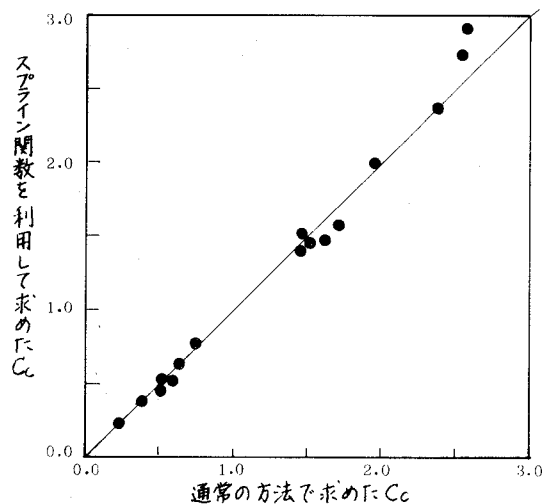


図-2 圧縮指数 C_c の比較