

早稲田大学 理工学部
早稲田大学 大学院
早稲田大学 理工学部

正会員 ○依田 照彦
学生会員 平林 隆
根本 佳明

[1] よえかき

任意の初期曲率と初期ねじれ率を有する空間曲線はりの力学的挙動を解析的な面から研究することは、一般に困難である。このため、設計においては、空間曲線はりを直線はりの集合に置き換えた折れ線近似モデルを用いて解析する手法がとられている。

本報告では、まずI型断面を持つ薄肉らせんはりの支配方程式の厳密解と固有値問題を介して求め、得られた厳密解を基礎に、折れ線近似解析の妥当性を数値的に調べた。次に、理論的考察として、折れ線近似モデルの解が、折れ線要素の数を増加させたときに、厳密解に収束するかどうかを、扇形形の支配方程式と比較し、折れ線近似による解析の有効範囲を明確にした¹⁾。さらに、折れ線近似による支配方程式から求まる解の精度を、自由振動問題と関連させて検討した。

[2] 近似解と厳密解の比較

図1、図2に示した二軸対称薄肉I型断面を有する、部材長 $l=42.83$ 、平面曲線半径 $R=40$ 、ピッチ角 $\phi=6^\circ$ （縦断勾配10.5%）の両端固定らせんばりを使用して、数値計算を行った。図3～図6に、外荷重として、はりの中央断面の図心に鉛直荷重の0.1ton(98 N)を載荷させたときの変位成分 u_1 , u_2 , u_3 , u_4 を示した。ここに、図中の縦軸は変位成分と、横軸は着目点の上方の固定端からの無次元化した距離を表わしている。曲線は厳密解を意味し、プロットは10要素折れ線近似モデルの近似解である。また、材料定数としては、ヤング率 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (206 GPa), ポアソン比 $\nu=0.30$ を用いた。

図から分かるように、厳密解と近似解の間には良い一致が見られる。

[3] 折れ線近似解析の有効範囲

折れ線近似モデルの支配方程式は、テーラー級数による差分方程式の誤差評価の手法を直接剛性法に適用して、力の平衡条件を考慮している節点の回りにその隣接節点の変位をテーラー級数で表現し、それを平衡方程式に代入することによって、誘導できる。このようにして得られた支配方程式と薄肉らせんはりの支配方程式とを比較すると、若干の差異は認められるものの、主たる項は一致することが判明した。

その結果、折れ線近似による解析が有効であるためには、

- (1) 初期ねじれ率が小さいこと
- (2) $EA \gg k_3^2 EJ_{yy}$ が成り立つこと (k_3 : 初期曲率)
- (3) $EJ_{yy} \gg k_3^2 EJ_{\omega\omega}$ が成り立つこと

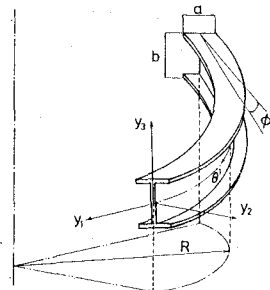


図1 薄肉らせんはりの全体図

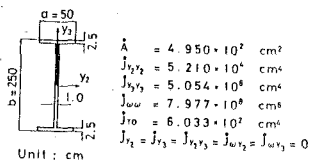


図2 薄肉I型断面の寸法
(断面定数は直線はりの値)

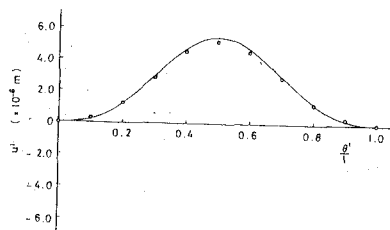


図3 鉛直荷重による u_1 方向変位

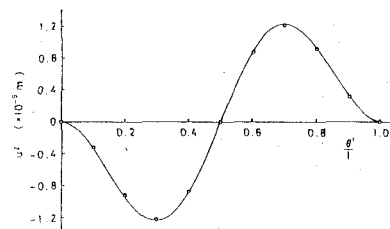


図4 鉛直荷重による u_2 方向変位

が必要であることが分った。本報告で利用したI型断面らせんばりについて、(1)、(2)、(3)の条件の具体的な値を示すと、

$$(1) \text{初期ねじり率 } h = 2.6 \times 10^{-3} \text{ /m (どっち角 } \phi = 6^\circ; \text{ 縦断勾配 } 0.5\%)$$

$$(2) \alpha = \frac{k_3^2 E J_{\phi \phi}}{E A} \div 0.66 \times 10^{-5} \ll 1$$

$$(3) \beta = \frac{k_3^2 E J_{\omega \omega}}{E J_{\phi \phi}} \div 0.50 \times 10^{-4} \ll 1$$

となり、前述の3条件が満たされていることが分かる。

付言するならば、通常の薄肉空間曲線ばりでは、3条件が常に満たされているので、折れ線近似解析が適用可能である。

[4] 近似解の誤差の評価

ここでは、簡単のため、薄肉I型断面らせんばりの初期ねじり率は小さく、その影響は無視し得ると考え、円弧ばりの支配方程式について解の精度を検討する。

折れ線近似モデルより得られる自由振動の支配方程式は、円弧ばりと直線ばりとの断面定数の差異を無視すれば、

$$E A U_{,1111} - k_3 E J_{\phi \phi} U_{,1111} - k_3 E A U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (1)$$

$$k_3 E J_{\phi \phi} U_{,1111} - [k_3 E A - k_3^2 E J_{\phi \phi}] U_{,11} + E J_{\phi \phi} U_{,1111} + k_3^2 E A U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (2)$$

$$-E J_{\phi \phi} U_{,1111} + k_3^2 G J_{T D} U_{,11} - k_3 E J_{\omega \omega} U_{,1111} + [k_3 E J_{\phi \phi} + k_3 G J_{T D}] U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (3)$$

$$-k_3 E J_{\omega \omega} U_{,1111} + [k_3 E J_{\phi \phi} + k_3 G J_{T D} - k_3^2 E J_{\omega \omega}] U_{,11} - E J_{\omega \omega} U_{,1111} + G J_{T D} U_{,11} - k_3^2 E J_{\phi \phi} U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (4)$$

となり、一次元棒理論による自由振動の支配方程式は

$$[E A + k_3^2 E J_{\phi \phi}] U_{,1111} - k_3 E J_{\phi \phi} U_{,1111} - k_3 E A U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (5)$$

$$k_3 E J_{\phi \phi} U_{,1111} - k_3 E A U_{,11} + E J_{\phi \phi} U_{,1111} + k_3^2 E A U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (6)$$

$$-[E J_{\phi \phi} + k_3^2 E J_{\omega \omega}] U_{,1111} + k_3^2 G J_{T D} U_{,11} - k_3 E J_{\omega \omega} U_{,1111} + [k_3 E J_{\phi \phi} + k_3 G J_{T D}] U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (7)$$

$$-k_3 E J_{\omega \omega} U_{,1111} + [k_3 E J_{\phi \phi} + k_3 G J_{T D}] U_{,11} - E J_{\omega \omega} U_{,1111} + G J_{T D} U_{,11} - k_3^2 E J_{\phi \phi} U_{,11} + \frac{r^2 A}{g} \ddot{U} = 0, \quad (8)$$

となる。ここに、()₁₁は座標 θ による微分を、()₁₁₁₁は時間 t による微分を表わし、 r :単位体積当りの重量、 g :重力加速度、 r :極二次半径である。⁴⁾

両端単純支持の円弧ばりの場合に対して、変位成分を面内関係と面外関係に分け、それぞれ、

$$\text{面内: } U(t, \theta) = U_m \sin \omega_m t \cos \frac{m \pi \theta}{\ell}, \quad U_{,1}(t, \theta) = U_m \sin \omega_m t \sin \frac{m \pi \theta}{\ell}, \quad (m: \text{正の整数}) \quad (9a, b)$$

$$\text{面外: } U_{,1}(t, \theta) = U_m \sin \omega_m t \sin \frac{m \pi \theta}{\ell}, \quad U_{,11}(t, \theta) = U_m \sin \omega_m t \cos \frac{m \pi \theta}{\ell}, \quad (m: \text{正の整数}) \quad (10a, b)$$

において、面内および面外の振動方程式と解くと、固有モードに対応した固有角振動数が求まる。

その結果、面内および面外の固有角振動数に関する近似解と厳密解との誤差評価式

$$\text{面内について: } |\Delta \omega_m| \leq C_1 \sqrt{\frac{g}{r A}} \sqrt{\lambda_m}, \quad (11)$$

$$\text{面外について: } |\Delta \omega_m| \leq C_2 \sqrt{\frac{g}{r A}} \sqrt{\lambda_m}, \quad (12)$$

が得られる。ここに、 $\lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{\ell^2}$ であり、 C_1, C_2 は各種のパラメータに依存する定数である。

式(11)、(12)より、折れ線近似解析による振動解析が有効となる必要条件是、 λ_m が十分小さいか、あるいは、 α と β が共に十分小さいかであることが分る。後者の場合は、前述した $\alpha \ll 1$; $\beta \ll 1$ と同じ結論になっている。

[5] あとがき

本報告の結果により、折れ線近似解析の有効範囲が明確になったと思われる。なお、数値計算は東京大学大型計算機センターのM-200Hに使用して行った。

参考文献

- 1) 依田・平嶋・布山: 第7回重量機械利用に関するシンポジウム, 1982年10月。
- 2) 川面・秋月: マトリクス解析法研究発表論文集, 1979年6月。
- 3) 鈴木・上野・西野: 第26回構造工学シンポジウム講演論文集, 1982年2月。
- 4) Vlasov, V. Z.: 薄肉弾性ばりの理論, 奥村他訳, 技報堂。

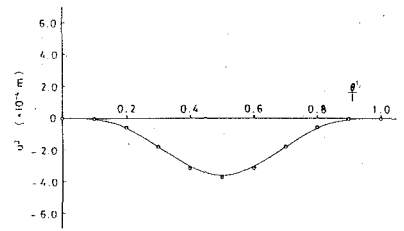


図5 鉛直荷重による y_3 方向変位 u_3

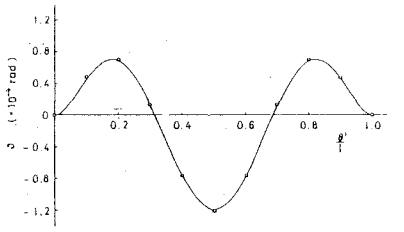


図6 鉛直荷重による y_3 軸回りの回転角 ϕ