Ⅳ－９　高校の土木応用力学を　どのように教えるか

東京都立小石川工業高等学校　正会員　三浦　基弘

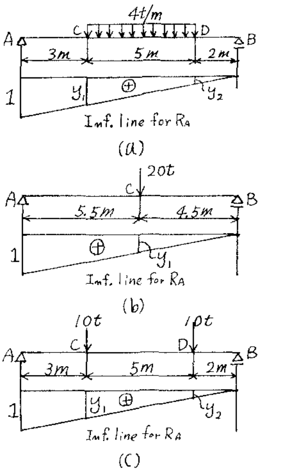
(a)　はじめに

長い間、教師生活を送ってくると講義に新鮮味を失うことがある。年数が経つと、それだけ教授方法も豊かに身についてくる反面、それに固執して柔軟性を持てなくなることもある。生徒から学ぶことの重要さは幾度か報告をしてきた。と同時に新しい工夫も述べてきた。しかし講義の中でいちばん感銘を受けるのは、生徒から新しい解法を示されたときである。

かってロゼッタストーンを解読したシャンポリオンが記者団から、「なぜ、解読できたのか？」という質問に、「昔も『今の若い者はどうしようもない。』と、いっているはずである。これが文章として必ずどこかに残っていると思い、これを手がかりに探した」と答えたというエピソードがある。自分の世代を絶対視せず、若い世代から積極的に学ぶ姿勢を持つこともとくに大切である。今回は生徒から学んだこと、生徒からの質問で考えたことなどを中心に述べることにする。

(b)　梁の反力を影響線で求めるA君の解法

単純梁、張出し梁、片持梁など、梁の解法を教えたあと梁の影響線を教えることにしている。たとえば、図－1(a)の単純梁に4t/mの等分布荷重が載っていたとき、反力R_Aの求め方は次のように教えている。まず反力R_Aの影響線を描く。次にy_1とy_2を求め、4t/mに影響している台形の面積をかけることで反力R_Aを求める。つまり反力R_A $= 4t/m \times \frac{(y_1+y_2)\times 5m}{2} = 4t/m \times \frac{(0.7+0.2)\times 5m}{2} = 9t$である。少なくない生徒は図－1(b)のような解法もする。$R_A = 20t \times y_1 = 20t \times 0.45 = 9t$　これは等分布荷重を集中荷重に置き換えた解法である。等分布荷重の作用点の位置をあらかじめ生徒に教えてあるから容易に想像できる。



図－1

今年の２年生に宿題を出したら、A君は次のような解法をした。反力R_A $= 10t\times(y_1+y_2) = 10t\times(0.7+0.2) = 9t$　私はこのような解法を思ってもみていなかったので、とても新鮮味を覚えた。

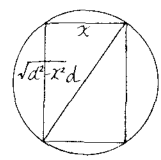
A君は図－1(b)の解法も考えたが、講義ではいつもy_1，y_2を与えられているのでこれを生かす方法を考えたのだろうである。つまり4t/mの等分布荷重が5mにおよぼしていると、中央に20tの集中荷重を載せたのと同じように$\frac{20t}{2}$、つまり10tの集中荷重を両端にそれぞれ載せたのと同じであると考えたわけである。

教師の板書をただノートに写し、それを覚える生徒が多い中で、こういう解法が生徒自身から考えだされると感激しないわけにはいかない。すばらしいA君の発想である。

(c)　丸太から最も経済的に強い長方形梁を切り出す方法

直径dの丸太から長方形梁を最も経済的に製材するには、幅と高さを$1:\sqrt{2}$にすればよいことが知られている。つまり、幅をxとすると高さは$\sqrt{d^2-x^2}$となる。梁は曲げモーメントに対して強いように断面を決めると経済的である。すなわち、$\sigma = \frac{M}{W}$（Mは曲げモーメント，Wは断面係数）、σを最小にするにはWを最大にするとよい。つまり、Wをxの関数にし、これを微分して0とおく。$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{x(\sqrt{d^2-x^2})^2}{6}$ $= \frac{d^2x - x^3}{6}$，$\frac{dW}{dx} = d^2 - 3x^2 = 0$ $\therefore x = \frac{d}{\sqrt{3}}$　よって　h（高さ）$= \sqrt{d^2-(\frac{d}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}d$

ゆえに　$b:h = \frac{d}{\sqrt{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}d = 1:\sqrt{2}$　よって、幅と高さは$1:\sqrt{2}$の比となる。

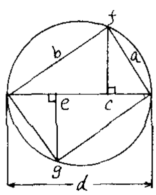


図－２

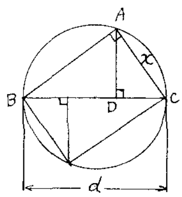
また、たわみを強くするには幅と高さを$1:\sqrt{3}$の比とするとよい。理由は　$\delta = \frac{M}{EI}$（Mは曲げモーメント，Eは弾性係数，Iは断面二次モーメント）、δを最小にするにはIを最大にすればよい。Iをxの関数にして、これを微分して0とおく。$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{x(\sqrt{d^2-x^2})^3}{12}$

$\frac{dI}{dx} = x \cdot \frac{1}{2}(d^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) + (d^2-x^2)^{\frac{3}{2}} = (d^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(d^2-4x^2) = 0$　$x = \pm d$, $\pm \frac{d}{2}$の場合を調べてみると、$x = \frac{d}{2}$のときIが最大となる。よって　h(高さ)$=\sqrt{d^2-(\frac{d}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$　ゆえに　$b:h = \frac{d}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}d = 1:\sqrt{3}$
よって、幅と高さは$1:\sqrt{3}$の比となる。これらのことは応用力学の本に書かれていることがあるが、作図の方法はあまり書かれていない。

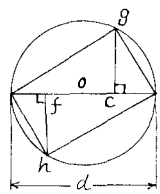
歴史を繙くと、パラン(Antoine Parent 1666－1716)が梁の曲げ問題を扱った初期の論文("Histoire de l'Académie des Sciences," Paris 1704)に上記に関係することを書いてある。パランはマリオットの仮定にしたがって、中立軸は曲げの面に直交する面内の凹側の境界の接線であると考えた。この仮定を基に、長手方向に一定の強さをもついろいろな形の梁を求めた。この中で最も強い長方形梁を丸太から切り出すにはどのようにしたらよいかというおもしろい問題を研究し、その結論として与えられた直径dに対して積ab^2を最大にするように切ればよいことを示した。それには直径を3等分し、cf と eg を立てればよいというわけである。(図－3)理由は、図－4においてΔABCとΔDACは相似形($\angle BAC = \angle ADC = \angle R$, $\angle C$は共通)で



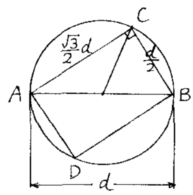
図－3



図－4



図－5



図－6

あるから $BC/AC = AC/DC$　いま、$BC=d$, $AC=x$とすると　$\frac{d}{x} = \frac{x}{\frac{d}{3}}$, $x^2 = \frac{d}{3}$ $\therefore x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ $(x>0)$, 一方ΔABCは直角三角形であるから、$AB^2 + \frac{d^2}{3} = d^2$　$\therefore AB = \sqrt{\frac{2}{3}}d$ $(AB>0)$ よって$AC:AB = \frac{d}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d = 1:\sqrt{2}$　<Q.E.D.>　たわみを強くする場合、つまり幅と高さの比を$1:\sqrt{3}$にする作図は、パランの方法を応用して直径dを4等分して垂線cgとfhを立てればよい。(図－5)証明は上記の方法で同様にできる。

ところが、今年の3年生のH君は図－6のような作図をした。直径dの半分、つまり$\frac{d}{2}$の半径でBを中心に円を描き、上側の弧$\overset{\frown}{AB}$と交わる点をCとする。そしてCとAを結ぶと三角形ABCができる。すると$\angle ACB$が直角である三角形になる。よって、$AB=d$, $BC=\frac{d}{2}$であるから　$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}d$となる。ゆえに　$BC:AC = \frac{d}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}d = 1:\sqrt{3}$になる。同様に$A$点を中心に$\frac{d}{2}$の半径で円を描き、下側の弧$\overset{\frown}{AB}$と交わる点$D$をとり三角形$ADB$を作図する。すると四辺形$ADBC$は幅と高さの比が$1:\sqrt{3}$となり求める長方形梁となるというわけである。

(d)　おわりに

ここ数年、生徒にただ知識を切り売りするのではなく、共にじっくり考える講義を中心に行なってきた。その成果が少し現れてきた気もする。生徒のユニークな解法が生まれてきたのもそのひとつであろう。数年前のある生徒は、私の講義の感想を次のように記した。「3年間の授業を教えていただき、ありがとうございました。三浦先生の授業の教え方は、他の先生と違い、ものごとのルーツをさぐり、どのような生いたちをへて現在のようになったのかを教えてくれました。ただ現在のことだけを知るのではなく、昔の人がどのような苦労をして、発見したか、発明したのかを知ることにより、今　現在のすばらしさを知ることができることも教えてくれました。(温故知新)」

常に新鮮な心構えで授業研究をする大切さを感ずる。最後に、関係諸氏の忌憚のないご批判をいただければ幸甚である。

参考文献　Stephen P. Timoshenko, "History of Strength of Materials," McGraw-Hill, 1953
拙著『物理の学校』東京図書　1979