

III-1 変形を拘束された粒状体の破壊について

東京大学生産技術研究所

龍岡文夫

上下端で摩擦力があるため、供試体の強度が過大評価する事や(図1)、並に地盤内に伸びにくい補強材を配置して支持力を増加する補強工法は、変形を拘束された粒状体の破壊の問題である。自重と内部摩擦角がある粒状体の極限塑性応力状態の解は、山口¹⁾, Sokolovskii²⁾が与えている。応力のつり合い式、極限応力状態を規定する破壊条件式から得られる特性微分方程式を積分し、すべり線網と作れば極限応力状態における応力分布(上界値)が求まる。しかし、この積分は任意の境界条件に対して簡単に行える訳ではない。本論文では、図1の場合を対象とした近似的な簡易積分法について報告する。

自重を無視し、二次元応力状態でのつり合い方程式を求めると(1)式となる。

粒状体全体が破壊状態にあるは、図4に示す関係(2)式を(1)式に代入すると、

(3)式が得られる。ただし、 φ は σ_1 方向と x 軸方向となす角度であり(図3)、

$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ である。(4)式を用いて、 $(3-1)\sin(\varphi+\varepsilon) - (3-2)\cos(\varphi+\varepsilon)$

の計算をすると(5)式が得られる。(6)式を用いると(5)式は簡略化されて、

(7)式を得る。(7)式は、(8)式が成り立つ時(9)式が成り立つ事を意味する。すな

わち、(8)式は図3を参照して、すべり線の方角をあらわしていることから、す

べり線に沿って(10)式が成り立つ事を意味する。即ち、「第1族のすべり線

(その方向は $dy/dx = \tan(\varphi-\varepsilon)$)に沿って $(\chi-\varphi)$ は一定であり、第2

族のすべり線(その方向は $dy/dx = \tan(\varphi+\varepsilon)$)に沿って $(\chi+\varphi)$ は一定であ

る。」²⁾

いま、図5のように端面での摩擦力が一定で c ($0 \leq c \leq p$)であるような剛

な境界を介して圧縮されている粒状体の供試体の破壊荷重(上界値) P_{max} を

求める問題を考える。一様な拘束圧 σ_c が側面ACに作用していると、三角形

ABC内の応力状態を求める問題はコーシー問題となり、OB上の最大主応力

σ_1 は、(11)式で一般的に与えられる。さらに、BD上の σ_1 が求められれば、力の

つり合いから、 P_{max} の値は W を幅として、(12)式で与えられる。BD上の

σ_1 は次の方法で近似的に求まる。BD上の一点aを通過する第1族のすべり

線を図6に示すようにab、bを通過する第2族のすべり線をbcとする。

条件: 点aで $\chi = \chi_a$, $\varphi = \varphi_a = 0$, 点bで $\chi = \chi_b$, $\varphi = \varphi_b = 0$,

点cで $\chi = \chi_c$, $\varphi = \varphi_c = 0$

を(13)式に代入すると(14)式が得られる。一方、a, b,

cの座標; $(\chi_a = 0, y_a)$, $(\chi_b = -h/2, y_b)$, $(\chi_c = 0, y_c)$ を(8)式を微分化した(15)式に代入して解くと、

(16)式を得る。ここで近似式(17)式が成り立つ

とすれば、多少の計算の後(18)式を得る。 $y=0$

でない107x-Aを用いて(10)式と

(18)式から(19)式が得られる。(19)式

における y_B , χ_B はB点における y と

χ の値であり(20)式で与えられる。又、

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1) \\ & \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma(1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \\ \sigma_3 &= \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \end{aligned} \right. \quad (2) \\ & (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ & \quad 2\sigma \sin \rho (\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}) = 0 \quad (3-1) \\ & \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ & \quad + 2\sigma \sin \rho (\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}) = 0 \quad (3-2) \\ & \quad \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \quad (4) \\ & \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\sigma \tan \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \cos(\varphi + \varepsilon) \\ & \quad - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \tan \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \sin(\varphi + \varepsilon) = 0 \quad (5) \\ & \quad \chi - \frac{\cos \rho}{2} \ln \frac{\sigma}{h} \quad (h = \text{constant}) \quad (6) \\ & \frac{\partial}{\partial x} (\chi + \varphi) \cos(\varphi + \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y} (\chi - \varphi) \sin(\varphi + \varepsilon) = 0 \quad (7) \\ & \quad \frac{dy}{dx} = \tan(\varphi + \varepsilon) \quad (8) \\ & \quad d(\chi + \varphi) = 0 \quad (9) \\ & \quad \chi + \varphi = \text{一定} \quad (10) \end{aligned}$$

図1. 供試体端面拘束

図2. 砂(土)の変形を拘束する工法

図3. Mohr-Coulombの破壊基準

図4. Mohr-Coulombの破壊基準

図5. Mohr-Coulombの破壊基準

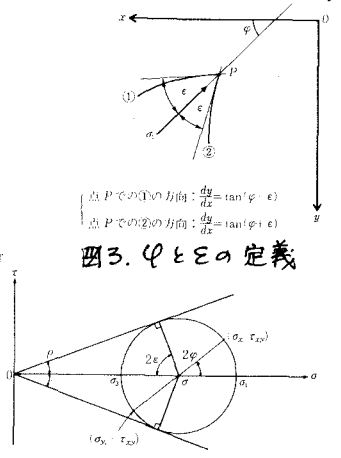
図6. Mohr-Coulombの破壊基準

図7. Mohr-Coulombの破壊基準

図8. Mohr-Coulombの破壊基準

図9. Mohr-Coulombの破壊基準

図10. Mohr-Coulombの破壊基準



点BD上の点(座標 $(0, y)$)での σ_r の値は, (6)式(19)式, (20)式から得られる(21)式で与えられる。(12)式は(22)式になるのを, (11)式の σ_B , (21)式の σ_r を(22)式に代入して積分すると以下の様になる。積分を簡略化するために(23)式で定義する B , (25)式で定義する P_1 を導入すると積分の結果は(24)式となる。 P_1 は変形を拘束した事による崩壊荷重の増加分を正規化した110ラキターと云うべきものであり, (24)式で与えられる P_1 を(25)式に代入する事により P_{max} の値が求まる。ただし, $\{P_{max}\}_{\delta=0}$ は $\delta=0$ の時の P_{max} の値で(26)式で与えられる。(24)式は(27)式に代り立ち, $d \leq h \tan \epsilon$ の時(28)式が成り立つ。同様に(23)式から $\delta=0$ の時は h/d の値によらず $B=0$ となり, (28)式が成り立つ。図7は P_1 と B の関係を示す。

次に図8の様な断面の摩擦角が δ である軸対称円筒状試体の場合を考える。 P_{max} は $1/2$ 高さ上の鉛直応力 σ_r を積分して得られる(29)式。(29)式での σ_r は(21)式で, σ_B は(11)式で与えられる。積分の結果は(30)式で与えられるが, B は(23)式で与えられる。 P_2 は(31)式で与えられる。図7には P_2 と B の関係を示してある。この場合も $d \leq h \tan \epsilon$, $\delta=0$ の時は $P_2=0$ であり, $P_{max} = \{P_{max}\}_{\delta=0}$ (26)式である。図7から分かることは, 同一の B の値に対して, 平面ひずみ, あるいは長方形伏試体のほうが円形伏試体よりも端面拘束効果が大きい事である。これは(21)式に示す様に, σ_r は側面から伏試体中心に向かって大きくなるが, 円形伏試体では σ_r の大きい部分が相対的に狭くなる, ことからである。

例題として, $d=7\text{cm}$, $h=3\text{cm}$, $\rho=45^\circ$ ($\pi/4$)の円筒型伏試体の場合で計算する。

見かけ上の平均最大主応力 $\sigma_{r_{max}}$ を
 $P_{max} / (\frac{\pi}{4} d^2)$ とすると,

$$(\sigma_r / \sigma_3)_{max} = \begin{cases} 5.83 & (\delta=0) \\ 83.5 & (\delta=\rho) \end{cases}$$

となり, 端面の拘束の効果は非常に大きいことを示している。

謝辞 大学院生高野公寿, 金藤浩司両氏

との討論が大変参考になった。末筆ながら図5 2次元応力問題例 (AB BC すべて) 線である) から感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 山口柏樹, "土の塑性力学", 最上武雄編 土質力学第7章, 技報堂土木工学叢書, 1967
- 2) Sokolovskii, V. V.: Statics of Granular Media, Pergamon Press, 1965 (Translated from Russian).

$$\begin{aligned} \sigma_{1\theta} &= \frac{1}{1 - \sin \rho} \sigma_e \quad (\text{OB 上で } \sigma_d) \quad (11) \\ P_{max} &= 2w \int_{y_B}^{h/2} \sigma_r dy \quad (12) \\ \chi_a &= \varphi_a - \chi_0 \varphi_0, \chi_b = \varphi_b - \chi_0 \varphi_0 \quad (13) \\ \chi_c &= \chi_a - 2\delta \quad (14) \\ y_a &= y_A - (x_A - x_B) \tan\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_a}{2} + \epsilon\right) \\ y_c &= y_A - (x_c - x_B) \tan\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_c}{2} + \epsilon\right) \quad (15) \\ y_c &= y_a - \frac{h}{2} \left\{ \tan\left(\frac{\delta}{2} + \epsilon\right) - \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \right\} \quad (16) \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{\chi_c - \chi_a}{y_c - y_a} \quad (17) \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{2\delta}{h} \frac{\cos \delta + \sin \rho}{\cos \rho} \cdot A \quad (18) \\ \chi &= \chi_a + A(y - y_a) \quad (19) \\ y_B &= \frac{h}{2} \tan \epsilon, \chi_B = -\frac{10}{2} \log \left\{ (a_1) a / h \right\} \quad (20) \\ a_1 &= a (1 + \sin \rho) \\ &= k \exp(\chi \cdot 2 \tan \rho) (1 - \sin \rho) \\ &= k (1 + \sin \rho) \exp(\chi_a \cdot 2 \tan \rho) \cdot \exp[A(y - y_a) \cdot 2 \tan \rho] \\ &= a_0 \exp[A(y - y_a) \cdot 2 \tan \rho] \quad (21) \\ P_{max} &= 2w \left[(\sigma_{1\theta} \cdot y_B) + \int_{y_B}^{h/2} \sigma_r dy \right] \quad (22) \\ B &= 2\delta \left\{ \frac{\cos \delta + \sin \rho}{\cos \rho} \right\} \tan \rho \left(\frac{d}{h} \tan \epsilon \right) \quad (23) \\ &\quad \left(\text{ただし, } \epsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \\ P_1 &= \frac{\exp(B) - 1}{B} \quad (24) \\ P_1 &= \frac{P_{max} / (P_{max})_{\delta=0} - 1}{\frac{h}{d} \tan \epsilon} \quad (25) \\ (P_{max})_0 &= w d \left(\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \right) \sigma_e \quad (26) \\ d &= h \tan \epsilon \quad (27) \\ P_1 &= 0 \quad (28) \\ P_{max} &= \int_{y_B}^{h/2} \sigma_r 2\pi r dr \quad (29) \\ &= \int_{\frac{\pi}{2} \tan \epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r 2\pi r dr : a_1 \int_{\frac{\pi}{2} \tan \epsilon}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r dr \quad (29) \\ P_2 &= 2 \left\{ \exp(B) \cdot \frac{B}{B^2} - \frac{1}{B} \right\} \quad (30) \\ P_2 &= \frac{P_{max} / (P_{max})_{\delta=0} - 1}{\left(\frac{h}{d} \tan \epsilon \right)^2} \quad (31) \end{aligned}$$

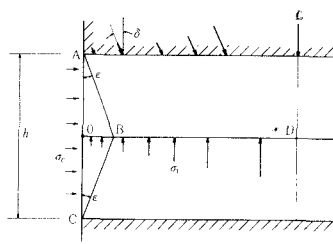


図5 2次元応力問題例 (AB BC すべて) 線である)

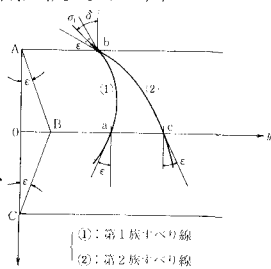


図6. せん断線の作図

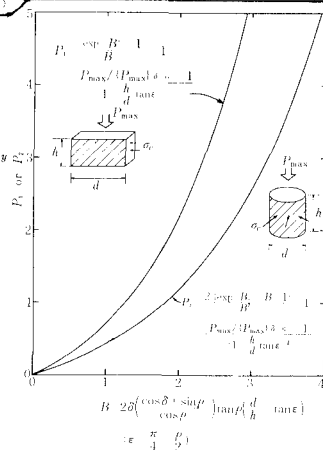


図7. 端面拘束効果と表す関係

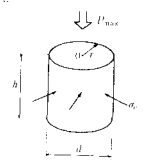


図8. 問題例