

早稲田大学大学院 学生員 ○金井 晴彦
早稲田大学理工学部 正 員 齋川 登

1. はじめに 波による水粒子速度の計算法の1つとして、Dean¹⁾により提案された流れ関数法がある。これは、実測波形と計算波形の差および海面でのベルヌーイ定数の変動を最小にするような級数解の係数を最小二乗法を用いて決定して表面波を表現する理論であり、従来の波動理論では表わし得なかった波の非線形性を表わすることができる。この理論は、本来一様な水深の水域に関するものであるが、非線形性の強い斜面上の海岸付近の波に適用できると考えられ、これまでも斜面上の波に対する適用がなされてきた。しかし、砕波付近の峯が尖ってくる場合やその他条件によっては数値的に発散する場合が生じている。ここでは、Deanの流れ関数法による計算法の収束性に関する改良を試みた。

2. Deanの流れ関数法の基礎方程式および計算方法

Dean¹⁾は波速と同じ速さで動く移動座標系において、流れ関数 ψ を次のように表現した。

$$\psi = \frac{L}{T} z + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{\sinh \frac{(n-2)\pi(h+z)}{L}}{L} \left\{ X(n) \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{L} x + X(n+1) \sin \frac{(n-2)\pi}{L} x \right\} \quad (1)$$

$z = \eta$ とおき、 $\psi(x, \eta) = X(3)$ とすると水面波形 η は次のようになる。

$$\eta = \frac{T}{L} X(3) - \frac{T}{L} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{\sinh \frac{(n-2)\pi(h+\eta)}{L}}{L} \left\{ X(n) \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{L} x + X(n+1) \sin \frac{(n-2)\pi}{L} x \right\} \quad (2)$$

(1)式の表示による流れ関数はラプラス方程式、底面の境界条件、水面の運動学的境界条件は満足しており、水面での力学的境界条件を満たせばよい。しかし、厳密に水面での力学的境界条件を満足させることはできないので、次のような誤差 E_T を定義し、 E_T を最小にするように(1)式の係数 $X(n)$ と波長 L 及び周期 T を決定する。

$$E_T = E_1 + \lambda E_2$$

$$= \frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^I (Q_i - \bar{Q})^2 + \lambda \sum_{i=1}^I (\eta_{pi} - \eta_{mi})^2 \right] \quad (3)$$

$$Q_i = \eta_{pi} + \{ (\psi_z)_i^2 + (\psi_x)_i^2 \} / 2g \quad (4)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Q_i \quad (5)$$

ここで、 η_{pi} は(2)式より与えられる理論波形、 η_{mi} は実測波形、 λ は定数である。 L の初期値として微小振幅波理論による波長、 T の初期値として測定周期、 $X(n)$ ($n=3 \sim N$)の初期値として E_2 を最小とする値を用い、逐次近似法により最終的な未知数を決定する。

3. Deanの流れ関数法の改良 Rienecker-Fenton²⁾の研究を参考にして、次のような流れ関数 ψ を考える。

$$\psi = \frac{L}{T} z + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{\sinh \frac{(n-2)\pi(h+z)}{L}}{\sinh \frac{(n-2)\pi h}{L}} \left\{ X(n) \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{L} x + X(n+1) \sin \frac{(n-2)\pi}{L} x \right\} \quad (6)$$

(6)式の分母における $\sinh \frac{(n-2)\pi h}{L}$ は収束改善のために導入したものである。これより η 、 u は次のようになる。

$$\eta = \frac{T}{L} X(3) - \frac{T}{L} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{\sinh \frac{(n-2)\pi(h+\eta)}{L}}{\sinh \frac{(n-2)\pi h}{L}} \left\{ X(n) \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{L} x + X(n+1) \sin \frac{(n-2)\pi}{L} x \right\} \quad (7)$$

$$u = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{(n-2)\pi}{L} \cdot \frac{\cosh \frac{(n-2)\pi(h+z)}{L}}{\sinh \frac{(n-2)\pi h}{L}} \left\{ X(n) \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{L} x + X(n+1) \sin \frac{(n-2)\pi}{L} x \right\} \quad (8)$$

Deanによれば周期は未知数となっているが、実験室の規則波の周期は確定していることより周期は既知数とした。

4. 計算結果 実験値として岩垣らによるデータ³⁾を計算に用いた。入は日野によれば、 $\lambda = 1$ 程度にとれば実験値と計算値がよく一致するのでここでは $\lambda = 1$ として計算を進めた。図1は波の峯の位相における水平水粒子速度の鉛直分布⁴⁾。実験値と計算値を比較したものであり、実線は改良した流束関数、点線は微小振幅波理論、一点鎖線はStokes波 γ 近似である。繰り返し計算回数は5回とした。図2は水面波形の収束性。図3は水平水粒子速度の収束性に関して、Deanの流束関数法と改良後の計算値を比較したものである。図中の破線は実験値を示す。なお、CASEⅢは微小振幅波理論で与えた波形を流束関数法で近似したものである。改良法は、CASEⅠが若干の発散を示すものの全体的に良好な収束性を与える。誤差 ϵ は10⁻⁵程度であった。Dean法はCASEⅠⅢが発散しCASEⅡは収束している。Dean法に比べて改良法は収束が速く、しかも良好な結果を与えている。

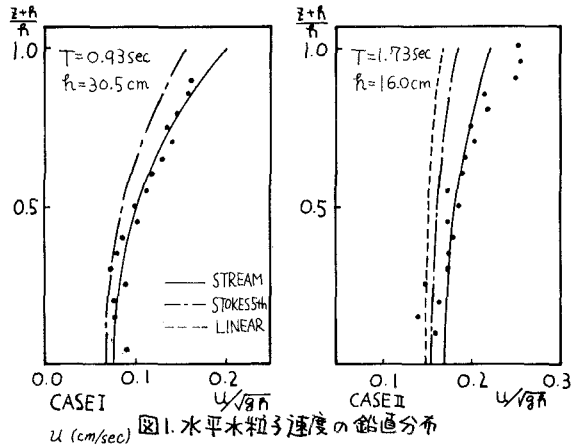


図1. 水平水粒子速度の鉛直分布

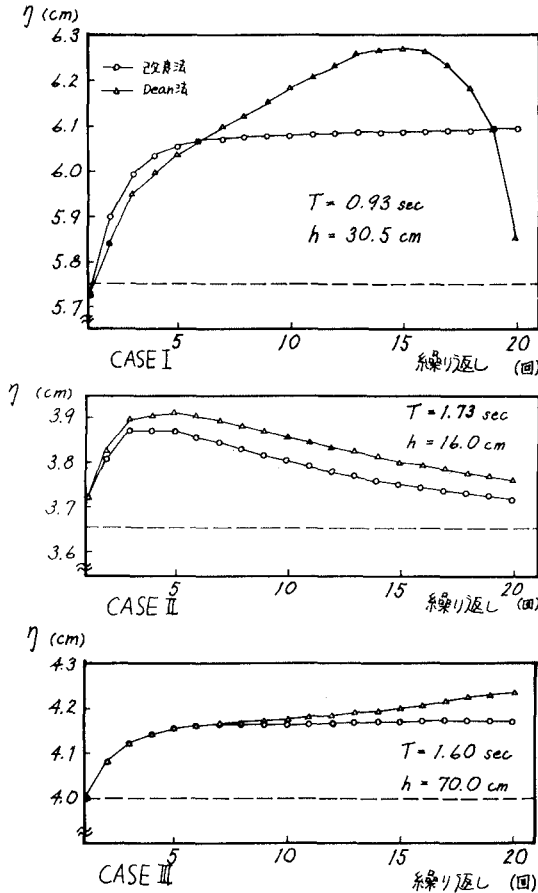


図2. 水面波形の収束性

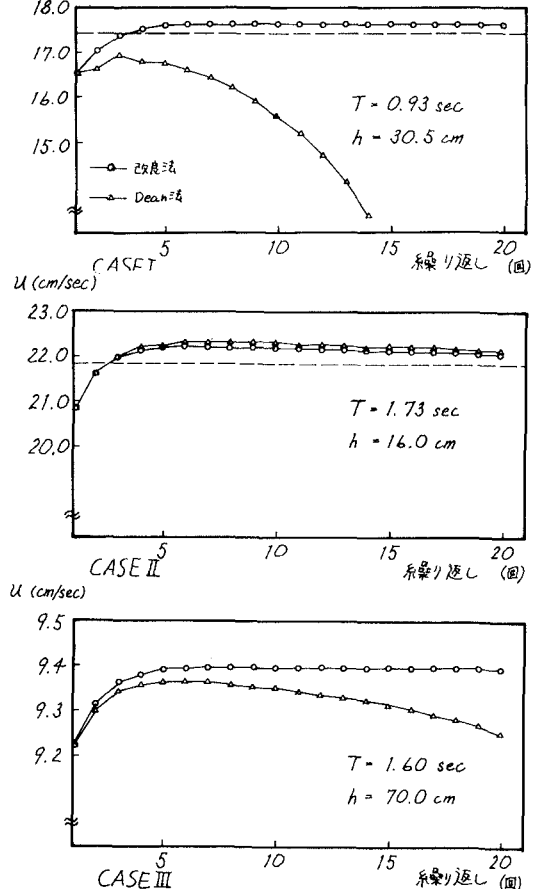


図3. 水平水粒子速度の収束性

- 《参考文献》 1) Dean, R.G.: Stream Function representation of nonlinear ocean waves. J. Geophysical Res. Vol. 70, 1965
 2) RIENECKER-Fenton: A Fourier approximation method for steady water waves. J. Fluid Mech. Vol. 104, 1981
 3) Sakai-Iwagaki: Horizontal Water particle Velocity of Finite Amplitude Waves: Coastal Eng. 1970
 4) 日野 豊太郎: Wave Setdown, Setup および水粒子軌道速度の推定に於けるDeanの流束関数法の適用性. 第25回海技 1978