

武蔵工業大学 正員 増田陳紀
 武蔵工業大学 正員 皆川 勝
 武蔵工業大学 学生員 西本哲也

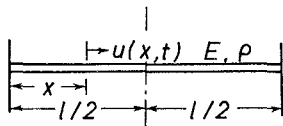
1. はじめに 波動伝播問題においては、一般に振動問題との相対でより高次の固有振動数成分までの寄与を考慮しなければならない。本研究は、1次元の波動方程式で表わされる棒の縦振動問題に対象を限定した上で、用いる形状関数や分割数などによる空間的モデル化が解析精度に及ぼす影響を、特にモデルの固有振動数分布と伝播波形を構成する振動数成分との対応に注目し検討したものである。

2. 解析対象 図-1に示す長さ l の一様断面棒が、図-2(a)に示す初期変位を与えられたときの縦振動問題を解析対象とする。ここで、 u は位置 x における変位、 t は時間、 ρ は密度、 E は縦弾性係数である。また、境界条件は両端固定、すなわち、 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ とする。ただしエルミート型3次式モデルに対しては、初期変位を図-2(b)のように与える。なお、応答計算は対称性を考え図-1の1/2部分についてのみ行う。

3. 解析対象のモデル化 形状関数はラグランジェ型の1, 2, 3次式(2, 3次式においては、内部自由度を有する。)および、エルミート型の3次式とし解析対象部分(半スパン1/2区間: 図-1)の分割は等分割とする。質量行列については、すべてのケースについて整合質量行列を用い、1, 2次式モデルについては集中質量行列も考える。表-1に対象とした解析モデルの一覧を示す。

4. 計算結果および考察 図-3は $x=l/2$ の点の最初の1周期分の応答波形を、いくつかのモデルについて比較したもので、横軸は時間軸である。いずれのモデルにおいても時間の経過とともに理論解からのずれが増大するが、その大きさは同自由度数では形状関数の次数が高いものほど小さい。また、同じ3次式モデルに注目すれば、ラグランジェモデルよりエルミートモデルの方がより理論波形に近い。図-4は各モデルの固有振動数の理論解との比を示したものである。いずれも固有振動数が高次になるにつれて誤差は大きくなる。整合質量モデルにおいて同自由度数のもの(6-3Cのみ18自由度、他は20自由度)に注目すれば、 $\omega_{0.3}$ 以下ではラグランジェ型の1, 2, 3次式モデル、エルミート型の3次式モデルの順に精度はよくなる(計算時間は、ほぼ同一である)。図-2(a)に示す初期変位を $X(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots} Q_n \sin \frac{n\pi x}{2}$ の形に分解し、 Q_n の大きさにより初期波形に含まれる固有振動数成分の比率を考えるものとする。 $Q_1 \sim Q_{20}$ までに95%以上を占める。そのためにラグランジェ型2, 3次式において比較的誤差の大きい固有振動数成分は応答計算にほとんど寄与しない。ゆえに各モデルの波形の近似度と固有振動数の精度の順が当然の事ながら一致している。図-5(a)~(d)は、図-4の固有振動数分布を同一の形状関数を用いたモデルごとに横軸の長さを同一にして描き直したものである。いずれの場合にも、固有振動数分布形状が自由度数にかかわらず同一になっていることがわかる。これより使用する形状関数および分割数を決定すれば、固有振動数の誤差を推定できることになる。なお、ラグランジェ型の2, 3次式モデルに対しては、分布形状中に1つの不連続点が存在し、それより高次の固有値に対しては急激に誤差が増大する。このことは不連続点を境にして前後の固有値の数が、これらのモデルを用いて全体構造系を構成した場合の内部自由度と外部自由度との数に対応していることから、内部自由度を有する要素を使用したことに原因するものと思われる。

5. おわりに 等分割モデルの場合、形状関数により一義的に固有値誤差を評価し得ることが数値実験的に明らかとなったが、今後、それら離散化モデルを用いた実際の応答波形の理論解への近似度をより定量的に把握し、固有値分布との対応を明らかにしたい。また、ここで述べた論義がもっと一般的な波動問題にも拡張できるかどうかについても検討する必要がある。



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; C = \frac{E}{\rho}$$

(両端固定の棒の縦振動)

図-1 解析対象

表-1 考慮する解析モデル

形状関数	1/2部分の 分割数	自由度数	MASS MATRIX CONSISTENT	LUMPED
1次式 (ラグランジュ型)	5	5	* 5-1C	5-1L
	10	10	10-1C	10-1L
	15	15	15-1C	15-1L
	20	20	20-1C	
2次式 (ラグランジュ型)	5	10	5-2C	5-2L
	10	20	10-2C	
3次式 (ラグランジュ型)	5	15	5-3C	
	6	18	6-3C	
3次式 (エルミート型)	5	10	5-3HC	
	10	20	10-3HC	

* 解析モデルの記号

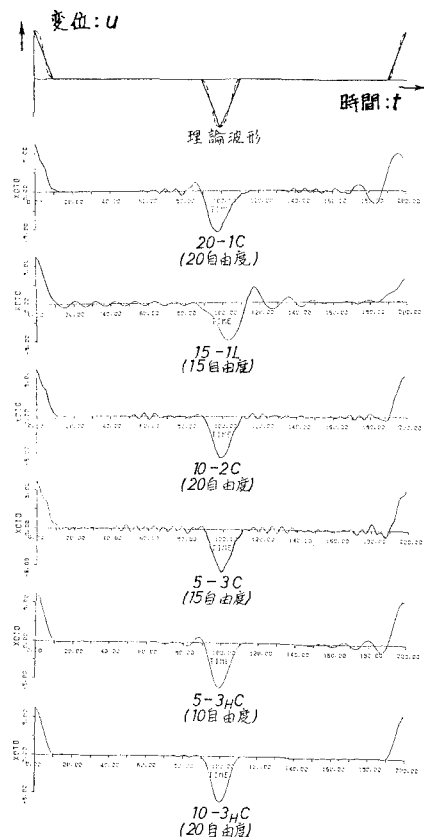


図-3 各モデルの応答波形(中央点)

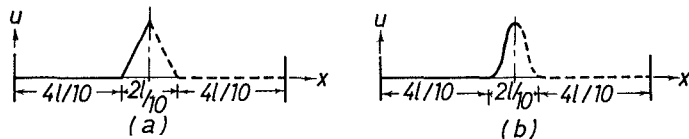


図-2 初期変位

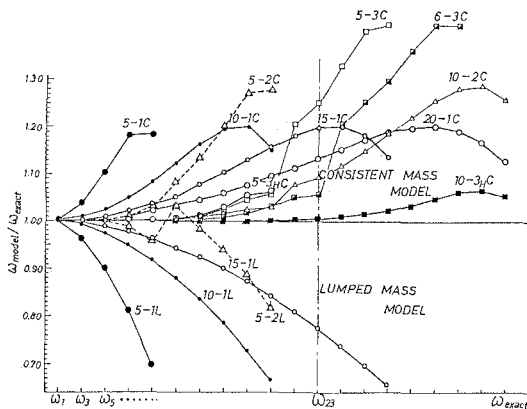
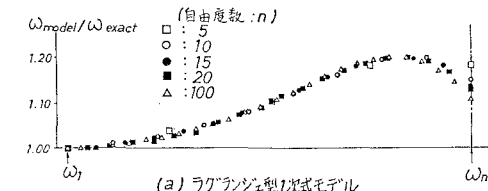
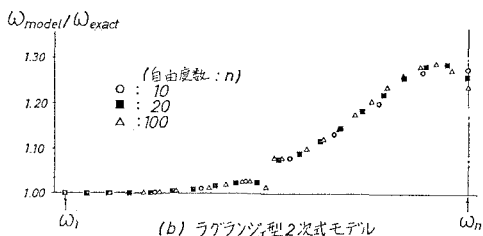


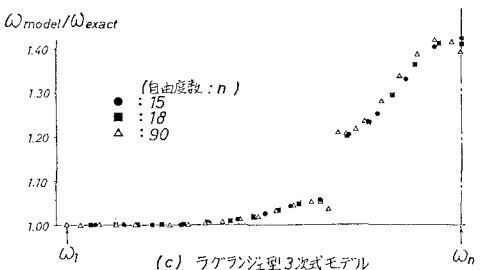
図-4 各モデルの固有振動数の理論解との比



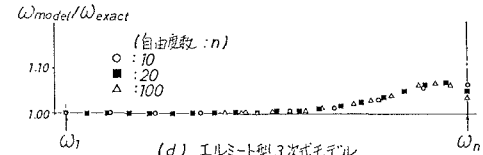
(a) ラグランジュ型1次モデル



(b) ラグランジュ型2次モデル



(c) ラグランジュ型3次モデル



(d) エルミート型3次モデル

図-5 各モデルの固有振動数分布形状