Ｉ－９　　等号制約条件上での最適解の探索

群馬高専　正員　平田恭久
東京都立大学　正員　伊藤文人

1. 等式制約探索法について

最適設計において最適解はなんらかの制約面上に存在するので，活性な制約面上で最適解を探索する方法を活荷重合成桁の設計を例にして考えてみた。ここでは"等号制約条件上での最適解の探索"を等式制約を与えて最適解を探索するという意味で"等式制約探索法"と略称する。

1）等式制約探索法の利点としては　①どのような制約条件により最適解での形状寸法が定まるかが明らかになる。土木構造物を設計するという見地からすると，どの制約条件から構造物の形状寸法が定まるかが設計者にとって重要であるが，この方法では等号条件として作用している制約条件を常に区別している。②等号条件として与えるため制約条件の取捨選択が行われ，よりシンプルな最適化問題を解くことになり必然的に計算量が少なくなる。最適設計問題では数多くの制約条件があるが，最適解のときに関係している制約条件の数は比較的少ないので，活性な制約式のみを扱うことができれば問題の寸法が小さくなる。③等号条件で与えるため方程式を解くことにより制約条件の処理ができるので，最適解の探索での収束性が向上すると考えられる。

2）等式制約探索法の問題点としては　①等号条件として与える"制約条件の組合せ"を選ぶのに工夫が必要である。与えた制約条件で探索した解が最適解でなければならないが，最適解が得られるような制約条件の組合せを選ぶ簡単なアルゴリズムを作ることが難しい。②解を制約面上に乗せるために方程式を解く必要がある。探索する変数を1 step進めるごとに等式制約を満足するよう変数を定めていくので，このための計算量が必要となる。

2. 最適解の算出式

1）等式制約探索法は①制約条件の組合せ（等式制約）を選ぶ　②この等式制約について最適解の探索を行う　の2段階に分かれる。第②段階のみに着目するとこれは等式制約つき最小化問題(1)式である。(1)式について等式制約および極値の条件を満足するには(2)式が成立していなければならない。(2)式から$d\mathbf{x}_m$を消去すると（$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_m}$のrank$=m$を仮定する），(3)式が得られる。$d\mathbf{x}_\ell$は自由に選べるベクトルなので，(3)式の[ ]内$=\mathbf{0}$であり，これより最適解の算出式(4)式が得られる。(4)式にはn個の式があるので，n個のx_jを定めることができる。

2）Lagrange未定乗数法との関係　等式制約つき最小化問題(1)式に対してはLagrange未定乗数法が適用できる。Lagrange関数(5)式を定義したとき(1)式の最小値であるための必要条件は(6)式である。(6)式の第1行を$\mathbf{x}_\ell$と$\mathbf{x}_m$とに分けると(7)式になる。$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_m}$のrank$=m$を仮定すると(7)式の第2行より$\boldsymbol{\lambda}$が求まる。また(7)式より$\boldsymbol{\lambda}$を消去すると最適解の算出式(4)式の第1行が得られる。

3）不等式制約つき最小化問題との関係　$\mathbf{x}^\circ$が最適解であるための必要条件は$\mathbf{x}^\circ$，$\boldsymbol{\lambda}^\circ$が(5)式の$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$に対して(9)式が成立することである。(9)式の$\boldsymbol{\lambda}^{\circ T}\mathbf{g}(\mathbf{x}^\circ)=0$は最適解では(10)式のようになっていることを意味している。等式制約つき最小化問題での必要条件(6)式には

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\mathbf{x}}\ Z=f(\mathbf{x}) &&\mathbf{x}:n\text{ベクトル}\ m<n\\ &\text{Subj.to}\ \mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0} &&\mathbf{g}:m\text{ベクトル関数}\end{aligned}\right\}\text{---(1)}$$

$$\left.\begin{aligned}&dZ=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_\ell}\right)^T d\mathbf{x}_\ell+\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}\right)^T d\mathbf{x}_m=0\ (1\text{個})\\ &\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}d\mathbf{x}=\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_\ell}d\mathbf{x}_\ell+\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_m}d\mathbf{x}_m=\mathbf{0}\ (m\text{個})\\ &\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0}\ (m\text{個})\quad \mathbf{x}_\ell:\text{探索する変数}\\ &\mathbf{x}_m:\text{等式制約により制約される変数}\end{aligned}\right\}\text{---(2)}$$

$$dZ=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_\ell}\right)^T-\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_m}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_\ell}\right)\right]d\mathbf{x}_\ell=0\ \text{----(3)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_\ell}\right)^T-\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_m}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_\ell}\right)=\mathbf{0}\ (n-m\text{個})\\ &\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0}\ (m\text{個})\end{aligned}\right\}\text{---(4)}$$

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{g}(\mathbf{x})\ \text{-----(5)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}}=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{0}\ (n\text{個})\\ &\frac{\partial L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{0}\qquad (m\text{個})\end{aligned}\right\}\text{---(6)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_\ell}\right)^T+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_\ell}=\mathbf{0}\ (n-m\text{個})\\ &\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}\right)^T+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_m}=\mathbf{0}\ (m\text{個})\end{aligned}\right\}\text{---(7)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\mathbf{x}}\ f(\mathbf{x})\\ &\text{Subj.to}\ \mathbf{g}(\mathbf{x})\leq\mathbf{0}\end{aligned}\right\}\text{-----(8)}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^\circ,\boldsymbol{\lambda}^\circ)}{\partial \mathbf{x}}=\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^\circ)}{\partial \mathbf{x}}\right)^T+\boldsymbol{\lambda}^{\circ T}\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^\circ)}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ の条件はない。不等式制約つきの場合 $\lambda_i < 0$ のものがあると"不利な組合せ"である。等式制約探索法では第1段階で"制約条件の組合せ(等式制約)"を選ぶことになっているが，この等式制約つき最小化問題の解 $\boldsymbol{x}^0$ を求めたとき $\boldsymbol{x}^0$ および $\boldsymbol{\lambda}^0$ は(11)式を満足していればよい。(11)式を満足していれば $\boldsymbol{x}^0$ は最適設計問題(不等式制約つき)の最適解であるための必要条件を満足している。

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) \leqq 0 \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x}^0;\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\lambda}^{0T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ \boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0 \end{array}\right\} \text{---(9)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{等号で満足 } g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \text{ については } \lambda_i^0 \geqq 0 \\ \text{不等号で満足 } g_i(\boldsymbol{x}^0) < 0 \text{ については } \lambda_i^0 = 0 \end{array}\right\} \text{---(10)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{他の制約式を不等号で満足する } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) \leqq 0 \\ \text{"不利な組合せ"でない } \boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0 \end{array}\right\} \text{---(11)}$$

3. 活荷重合成桁での例

1)設計変数は床版を与件として鋼桁断面についての $\boldsymbol{x} = (h_w, A_c, A_t, t_w, t_c, t_t)^T$ の6個とする，制約式は主としてフランジ断面積 A_c, A_t を定める制約式を g_c(圧縮側)，g_t(引張側)とするが，等号条件 $g_c(\boldsymbol{x}) = 0$，$g_t(\boldsymbol{x}) = 0$ を与えて板厚 t_w, t_c, t_t の最適値を探索すると，板厚は最小厚または最大厚(t_t はこれに抵触する場合がある)の制限に抵触するので，板厚の制約式 g_{tw}, g_{tc}, g_{tt} について等号条件 $g_{tw}(\boldsymbol{x}) = 0$，$g_{tc}(\boldsymbol{x}) = 0$，$g_{tt}(\boldsymbol{x}) = 0$ を与えることになる。よって探索する変数 $\boldsymbol{x}_l = (h_w)^T$，制約される変数 $\boldsymbol{x}_m = (A_c, A_t, t_w, t_c, t_t)^T$ として(4)式に対応した最適 h_w(腹板高)の算出式を導くと(12)式になり，これは最適桁高の算出式である。なお探索する変数に h_w を用いると $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}_m}$ の $rank = m$ が通常の制約式に対し成立しているので，h_w での探索が常に可能である。これが最適解の探索に桁高が用いられる理由の一つである。

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f'}{\partial h_w} + \dfrac{\dfrac{\partial g_c'}{\partial h_w}\left(\dfrac{\partial f'}{\partial A_t}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_c} - \dfrac{\partial f'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_t}\right) + \dfrac{\partial g_t'}{\partial h_w}\left(\dfrac{\partial f'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_t} - \dfrac{\partial f'}{\partial A_t}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_c}\right)}{\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_t} - \dfrac{\partial g_t'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_t}} = 0 \\ g_c = 0,\ g_t = 0,\ g_{tw} = 0,\ g_{tc} = 0,\ g_{tt} = 0 \\ \text{ただし } \dfrac{\partial f'}{\partial h_w} = \dfrac{\partial f}{\partial h_w} + \dfrac{\partial f}{\partial t_w}\dfrac{\partial g_{tw}}{\partial h_w},\ \dfrac{\partial g_c'}{\partial A_t} = \dfrac{\partial g_c}{\partial A_t} + \dfrac{\partial g_c}{\partial t_t}\dfrac{\partial g_{tt}}{\partial A_t} \end{array}\right] \text{---(12)}$$

のようになっている

$$\lambda_c = \frac{\dfrac{\partial f'}{\partial A_t}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_c} - \dfrac{\partial f'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_t}}{\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_t} - \dfrac{\partial g_t'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_t}},\quad \lambda_t = \frac{\dfrac{\partial f'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_t} - \dfrac{\partial f'}{\partial A_t}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_c}}{\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_t'}{\partial A_t} - \dfrac{\partial g_t'}{\partial A_c}\dfrac{\partial g_c'}{\partial A_t}} \quad \text{---(13)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{tw} = \left[-1\Big/\dfrac{\partial g_{tw}}{\partial t_w}\right]\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_w} + \lambda_c\dfrac{\partial g_c}{\partial t_w} + \lambda_t\dfrac{\partial g_t}{\partial t_w}\right) \\ \lambda_{tc} = \left[-1\Big/\dfrac{\partial g_{tc}}{\partial t_c}\right]\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_c} + \lambda_c\dfrac{\partial g_c}{\partial t_c} + \lambda_t\dfrac{\partial g_t}{\partial t_c}\right) \\ \lambda_{tt} = \left[-1\Big/\dfrac{\partial g_{tt}}{\partial t_t}\right]\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_t} + \lambda_c\dfrac{\partial g_c}{\partial t_t} + \lambda_t\dfrac{\partial g_t}{\partial t_t}\right) \end{array}\right] \text{---(14)}$$

2)制約式 $g_c, g_t, g_{tw}, g_{tc}, g_{tt}$ に対応するLagrange乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を $\lambda_c, \lambda_t, \lambda_{tw}, \lambda_{tc}, \lambda_{tt}$ とすると，$\boldsymbol{\lambda}$ の算出式は(13)，(14)式で表わされる。最適解で $\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ になっているためには制約条件の組合せを考えておかねばならない。①主として A_c, A_t を定める制約式を圧縮側 g_c と引張側 g_t とに分けて，g_c と g_t とを組み合わせるようにすると $\lambda_c \geqq 0, \lambda_t \geqq 0$ になると考えられる(フランジ厚さ無視した場合については $\lambda_c \geqq 0, \lambda_t \geqq 0$ であることを確かめてある)。② $\lambda_{tw}, \lambda_{tc}, \lambda_{tt}$ については(14)式の( )内は板厚の影響 $\dfrac{\partial A_s}{\partial t}$ であり，(14)式の[ ]内は最小厚の制約式のとき $= \underline{1}$，最大厚の制約式のとき $= \underline{-1}$ であるので，板厚が薄い方が有利なら $\left(\dfrac{\partial A_s}{\partial t} > 0\right)$ 最小厚の制約式を，板厚が厚い方が有利なら $\left(\dfrac{\partial A_s}{\partial t} < 0\right)$ 最大厚の制約式を，採用すれば $\lambda_{tw}, \lambda_{tc}, \lambda_{tt}$ は正となる。③これより上記①，②のように制約式を組み合わせておくと $\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ が確保されるので，"不利な組合せ"にはならない。

4. 制約条件の組合せを選ぶ方法

1)探索が終了した時点で与えた等式制約により得られた解 $\boldsymbol{x}$ が不等式制約つき最小化問題の最適解になっているかどうかは(11)式によりチェックできる。(11)式を満足していれば与えた制約式が適当であったことが分かるが，問題はそのような組合せを探索の途中で見つける方法である。$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqq 0$ については探索の途中においてもアルゴリズムにより比較的簡単に処理できるが，$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ については合成桁での例のように特定の問題であれば考察により選ぶことができるが，一般的な問題に対する簡便なアルゴリズムを得るには工夫を要する。$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ の判定により組合せを選びながら探索を行っていくには $\boldsymbol{\lambda}$ を計算しながら進むことになるが，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_m}\right)^T + \boldsymbol{\lambda}^T\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}_m} = 0$ より m 個の λ_i が求められる(他の λ_i は，$\lambda_i = 0$ である)。このとき $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}$ の値が必要であるが，方程式を解くのにNewton法を用いていると $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}$ の値はNewton法のために計算してあるので，これを共用することができる。

2)以上のように等式制約探索法は最適解が得られるような制約条件の組合せを選ぶアルゴリズムに若干問題はあるが，全体としてみれば構造物の最適設計に向いた方法であると考えられる。