

防衛大学校土木工学教室 正員 石川信隆

研究科 学生員○谷中弘行

ハ ハ ハ 三原徹治

1. 緒言

造解析や構造設計の分野においても、大型電子計算機の利用と並んで、今後このような小型コンピュータの使用が盛んとなり、構造解析用のプログラムの開発も必要となるものと思われる。

本研究は、上記のような観点から、大規模構造物を小型コンピュータにより解析するための基礎的段階として、まず数理計画法による弾塑性解析法の体系化を図り、次いで線形計画法(LP)における分割法を用いて、効率的な計算手法の開発を企図し、さらに数値計算により地盤の影響をも含めた構造物の弾塑性挙動を究明するものである。なお、本研究では慣用の単純塑性理論に従うほか、次の仮定を用いる。1) 構造物は有限個の部材要素に、地盤はばね要素に置換できるものとする。2) 降伏条件は線形化降伏凸多面体を用いる。3) 分布荷重は集中荷重に置換できるものとする。

2. 数理計画法による弾塑性解析の基本式

(1) ホロミック解析 (a) 2次計画法(QP)による基本式

構造物の崩壊時における応力と変形を求める解析をゼロ・ミッド解析(終局変形解析)というが、これは応力を未知数とする応力法と変形を未知数とする変形法の2つがあり、通常表-1のような2次元画法(QP)の問題として表示される¹⁾。ここに、表-1の応力法は⑤のつり合い条件と④の降伏条件を満足したうえで、構造全体のコンプリメンタリーエネルギーを最小とするように、応力Qを求める問題であり、表-1の変形法は③の弾塑性変形適合条件を満足したうえで、構造全体のポテンシャルエネルギーを最小とするように、変形 q_e, λ, u を求める問題である。

ただし、 $\mathbf{E}^0$ = 変性マトリクス； $\mathbf{E}^1$ = 剛性マトリクス； $\mathbf{C}$ = 適合マトリクス； α = 荷重係数；
 $\mathbf{F}$ = 外力荷重ベクトル； $\mathbf{N}^I$ = 断面の線形化降伏線(面)の外向き単位ベクトル； $\mathbf{R}$ = 断面の線形化降伏線
 (面)の原点からの距離； λ = 塑性変形を示す乗数； $\mathbf{N}(\lambda) = (\mathbf{g}_p)$ = 塑性変形ベクトル； $\mathbf{g}_e$ = 弾性変形ベ
 クトル； Φ = 降伏関数ベクトル； $\mathbf{u}$ = 節点変位ベクトル。

(b) LPによる基本式

表-1のQP基本式にKuhn-Tucker条件を適用すると弾塑性解析に必要な⑤つり合い条件、⑥変形適合条件、⑦降伏条件および⑧塑性流れ条件の4つの基本的条件がえられ、⑨の塑性流れ条件は目的関数とし、⑤、⑥、⑦を制約条件とすれば、表-2に示すような修正応力法および修正変形法の2つがえられる。

(c) LP 分割法による基本式

表-1 ホロミック解析(QP式)

Force Method (Minimum Principle of Complementary Energy)	Deformation Method (Minimum Principle of Potential Energy)
$U = \frac{1}{2} Q^T K^{-1} Q \rightarrow \min$ (E) $C^T Q = \Delta F$ (V) $\phi = N^T Q - R \leq 0$	$V = \frac{1}{2} Q^T k Q + R^T \lambda - \Delta F^T u$ $\rightarrow \min$ (C) $q_s + N \lambda - C u = 0$ $\lambda \geq 0$ Where $q_s = K^T Q$

表-2 ホロミック解析(LP式)

	Modified Force Method	Modified Deformation Method
Given	K, C, N, R, F, Δ	K, C, N, R, F, Δ
Find	Q, U, λ, Φ	λ, Φ
Object	$\min Z = (-\Phi)^T \lambda \rightarrow \min$	$\min Z = (-\Phi)^T \lambda \rightarrow \min$
S.1.	$\textcircled{E} \quad C^T Q = \Delta F$ $\textcircled{C} \quad N \lambda - C U + K^T Q = 0$ $\textcircled{Y} \quad N^T Q + (-\Phi) = R$ $\lambda \geq 0$ $(-\Phi) \geq 0$	$\textcircled{E} + \textcircled{C} + \textcircled{Y}$ $\Delta^T Q + A \lambda - (-\Phi) = R$ Where $K_s = K^T K$ $A = N^T Z N$ $Z = K C K_s C^T K - K$

表-3 ホロミック解析(LP分割式)

	Decomposed Force Method	Decomposed Deformation Method
Given	$\bar{K}, C, U, V, F$	k, C, U, V, F
Find	$\mu, w, u, \psi, \alpha, X$	w, ψ, α, X
object	$\textcircled{P} Z(\bar{A}^T) W \bar{X} \mu \rightarrow \min$	$\textcircled{P} Z(\bar{A}^T) W \bar{X} \mu \rightarrow \min$
s. t.	$\textcircled{E} C^T V \mu = \Delta F$ $\textcircled{C} U w - V^T C u - \bar{K} \mu \leq 0$ $\textcircled{V} U \mu - (-r)^T = 1$ $\mu \geq 0 \quad w \geq 0$ $(-r)^T \geq 0$	$\textcircled{E}, \textcircled{C}, \textcircled{V}$ $\Delta \bar{U} \bar{Q}, \bar{A} w, (-r)^T \bar{B} X = 1$ $w \geq 0$ $(-r)^T \geq 0, X \geq 0$
where	$\bar{Q} = V^T U$ $\bar{K}^T = V^T K V$ $\bar{K} = (K)^{-1}$	Where $\bar{Q} = k^{-1} \bar{C}^T \bar{K} F$ $\bar{K}_i = \bar{C}_i^T \bar{k} \bar{C}_i$ $\bar{A} = U^T \bar{Z} U$ $\bar{Z} = \bar{k} \bar{C} \bar{C}^T \bar{C}^T \bar{k} \bar{C}$ $\bar{B} = U \bar{Z}, \bar{C} = V \bar{C}$

LPにおける分割法とは、原問題における解がある一部の部分問題における許容可能領域の端点の凸一次結合によって表わされるというもので、例えば表-1の⑦の降伏条件を部分問題とすれば、内部の応力Qは要素の降伏凸多面体(断面の降伏条件を1次の応力空間に投影することによってえられる凸降伏空間)の頂点座標の凸一次結合として表わされる。

$$\text{すなわち, } Q = V\mu \text{ ----- (1a)}$$

$$V\mu \leq 1 \text{ ----- (1b)}$$

$$\mu \geq 0 \text{ ----- (1c)}$$

ただし、 $V (=X \cdot U)$ = 降伏凸多面体の頂点座標マトリクス; X = 無次元化の k の塑性容量マトリクス;
 U = 無次元化の頂点座標マトリクス; μ = 凸一次結合の係数ベクトル; V = 単位行ベクトル

ここに式(1b)は凸一次結合を示す係数が1より小さいことを示すもので、これは応力Qが降伏凸多面体の内部もしくは線上にゐることを意味し、表-1の⑦または表-2の⑦に代る降伏条件を表わす。式(1)を表-2に代入すれば、ホロミック解析におけるLP分割法の基本式が表-3のようにえられる。

(2) 増分解析

増分解析は初期降伏時より最終崩壊時までの荷重-変形関係を求める解析法であり、表-2,3のホロミック解析の基本式を増分形式として表示すれば、表-4,5がそれぞれえられる。ただし、 Φ, Q = 前荷重段階における降伏関数、応力ベクトルを示す。

3. 数値計算例

図-1(a)に示すような弾塑性地盤中に埋め込まれたアーチ構造物に水平等分布荷重が作用するとき、図-1(b)のような構造および荷重モデルに置換したうえで、ホロミック解析と増分解析を行った。

図-2(a)は最終の崩壊モードを、図-2(b)は最終の変形図を示したもので、地盤の降伏により崩壊メカニズムが形成される。この最終状態における結果はホロミック解析と増分解析とによる解が全く一致したが、比例荷重でも途中の段階で除荷が生ずる場合は最終状態の値が一致しない場合がある²⁾。図-3は増分解析による荷重-変形関係を示したもので、固定アーチの場合に比し、地盤を考慮すると耐力で約52%低下することが認められる。

4. 結 言

(1) 数値計画法を利用することにより弾塑性解析

理論の明確化と体系化を図ることができた。

(2) LP分割法を利用することにより計算の効率化を図ることができた。

(3) 地盤を考慮した構造物の一体解析の必要が認められた。

参考文献

- 1) Maier, G, Grierson, D.E. and Best, M.J., "Mathematical Programming Methods for Deformation Analysis at Plastic Collapse", Computers & Structures, Vol. 7, PP599-612, Pergamon Press, 1977.
- 2) Ishikawa, N., "Load-Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames by Linear Programming", Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 23, PP. 413-425, University of Tokyo Press, 1975.

表-4 増分解析 (LP式)

	Modified Force Method	Modified Deformation Method
Given	k, C, N, R, F, Φ	k, C, N, R, F, Φ
Find	$\Delta Q, \Delta U, \Delta X, \Delta \lambda, \Phi$	$\Delta u, \Delta \lambda, \Phi$
object	$\Delta u \rightarrow \max.$	$\Delta u \rightarrow \max.$
s. t.	$\textcircled{1} C' \Delta Q - \Delta u F = 0$ $\textcircled{2} N \Delta \lambda - C \Delta u + K \Delta Q = 0$ $\textcircled{3} \Phi = \Phi + \Delta \Phi \leq 0$ $\textcircled{4} \Phi' \cdot \Delta \lambda = 0$ $\Delta \lambda \geq 0$	$\textcircled{1} \textcircled{2} \cdot \textcircled{3}$ $N \Delta \lambda - A \Delta u \cdot (-\Phi) = (-\Phi)$ $\textcircled{2} \Phi' \cdot \Delta \lambda = 0$ $\Delta \lambda \geq 0, -\Phi \geq 0$
Where	$\Phi = N \bar{Q} - R$ $\Delta \Phi = N \Delta Q$	$\bar{Q} = k C K F$ $K = C' k C$ $A = N' Z N$ $Z = k C K C' k - k$
then	$\bar{Q} = \bar{Q} + \Delta Q$ $U = U + \Delta U$ $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$ $\Delta X = \Delta X + \Delta \lambda$	$\Delta u = K C K C' k N \Delta \lambda$ $\Delta Q = \bar{Q} - \Delta u \cdot Z N \Delta \lambda$

表-5 増分解析 (LP式)

	Decomposed Force Method	Decomposed Deformation Method
Given	k, C, U, V, F, Φ	k, C, U, V, F, Φ
Find	$\Delta u, \Delta W, \Delta X, \Phi, \Delta \lambda, \Delta X$	$\Delta u, \Phi, \Delta \lambda, \Delta X$
object	$\Delta u \rightarrow \max.$	$\Delta u \rightarrow \max.$
s. t.	$\textcircled{1} C' V \Delta u - \Delta W F = 0$ $\textcircled{2} -X \Delta W - V C U - K \Delta u = 0$ $\textcircled{3} \Phi = \Phi + \Delta \Phi \leq 0$ $\textcircled{4} \Phi' \cdot \Delta W = 0$ $\textcircled{5} \Phi' \cdot \Delta W = 0$ $\Delta W \geq 0, (-\Phi) \geq 0$	$\textcircled{1} \textcircled{2} \cdot \textcircled{3}$ $U \Delta u - A \Delta W \cdot (-\Phi) = (-\Phi)$ $\textcircled{2} \Phi' \cdot \Delta W = 0$ $\textcircled{3} \Phi' \cdot \Delta W = 0$ $\Delta W \geq 0, (-\Phi) \geq 0$
Where	$\Phi = U' \bar{W} - F$ $\Delta \Phi = U' \Delta W$ $K = V' K' V$ $K = (K')$	$\bar{W} = k C K F$ $K = C' k C$ $A = U' Z U$ $Z = k C K C' k$ $-k, C = V C$
then	$\Delta u = V \cdot \Delta W$ $\bar{W} = \bar{W} + \Delta W$ $W = W + \Delta W$ $U = U + \Delta U$	$\Delta u = K C K C' k (U \Delta W - X)$ $\Delta W = \bar{W} - \Delta u \cdot Z (U \Delta W - X)$ $\Delta Q = V \cdot \Delta W$

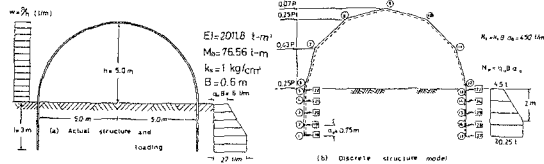


図-1 構造および荷重形式

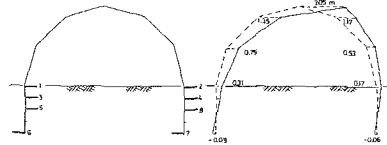


図-2 (a) 崩壊機構 (b) 終局変形図

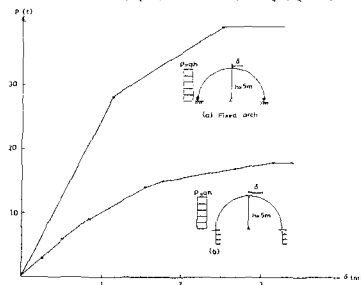


図-3 荷重-変形曲線