I－4　　せん断ばねを考慮した有限剛体要素モデルの一考察

東京都立大学　正会員　○野上　邦栄
東京都立大学　正会員　　伊藤　文人

1. まえがき

有限要素法に代る新しい離散化モデルとして，川井教授[1]の提案した剛体要素－ばね系モデルは，必らずしもあらゆる問題に収束の保証できる証明が得られている訳ではないが，次々と良い解析結果を与えており，注目すべき方法である。このモデルは，弾性問題よりも塑性を含む極限状態の解析のために考案されたものではあるが，弾性状態を含めて良い結果が得られることは，時によっては大変望ましい。

棒部材(はり，柱)の場合，有限要素法とまったく同様に正確に弾性ひずみエネルギーを表現できるばねの選定が可能であり，したがって弾性状態における解の収束が保証できる。筆者ら[2]は，数年来，1断面に軸ばね2本を用いた柱モデル（拡張シャンレーモデル）により，幾何学的非線形と材料的非線形を含めた問題を解析してきたが，1断面に軸ばね2本では，非弾性領域をより厳密に考慮することに難がある。さらにDeep Beam問題や立体構造物に拡張して用いる場合，せん断ばねをも導入する必要がある。そこで，本報告では，ある有限な本数の軸ばねとせん断ばねを用いた有限剛体要素モデルを提案している。

2. 解析モデル

梁の全長を任意の長さに分割し（本報告では等分割），各々の要素は剛体であるとし各要素間を有限な数の軸ばねとせん断ばねで連結したモデルがFig-1である。任意要素 i と隣接要素 $i+1$ の間の節点番号を (i) とし，軸ばねのばね常数を各々 k_{aki}，せん断ばね常数を k_{si} とする。又軸ばねは断面中心線から各々 y_{ki} の距離の位置に配置される。今，節点数 n，軸ばね本数を m 本とすると，全てのばねに蓄えられる弾性ひずみエネルギーは，

$$U_s=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{m}k_{aki}\{u_{i+1}-u_i+y_{ki}(\theta_i-\theta_{i+1})\}^2+K_{si}\{\tfrac{L}{2}(\theta_i+\theta_{i+1})+(v_i-v_{i+1})\}^2\Big] \qquad (1)$$

で与えられる。他方，梁全体を連続弾性体とすると，全ひずみエネルギーは次式で与えられる。

$$U_c=\frac{1}{2}\int_0^{l}[EA\varepsilon_o^2+2EA(\varepsilon_o/\rho)y_o+EA(g_o/\rho)^2+GA\gamma_o^2]\,dz \qquad (2)$$

ここで，積分は全体を多くの部分に分割し，その部分要素の内部の代表断面における ε_o,ρ を ε_{oi},ρ_i，部分要素長さを L_i^* とすると(2)式は，次式によって充分な精確さで近似できる。（本報告では $L_i^*=L$）

$$U_c\fallingdotseq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[EA_i\varepsilon_{oi}^2+2EA_i(\varepsilon_{oi}/\rho_i)y_{oi}+EA(g_{oi}/\rho_i)^2+GA_i\gamma_{oi}^2]\cdot L_i^* \qquad (3)$$

なお，(2)式において．$EA=\int E\,dA$，$GA=\int G\,dA$，$y_o=\frac{1}{EA}\int Ey\,dA$，$g_o^2=\frac{1}{EA}\int Ey^2dA$ を意味する。

今，次の関係が成り立つものとすると

$$u_{i+1}-u_i=\varepsilon_{oi}L,\quad \theta_{i+1}-\theta_i=L/\rho_i,\quad (\theta_i+\theta_{i+1})L/2+(v_i-v_{i+1})=\gamma_{oi}\cdot L \qquad (4)$$

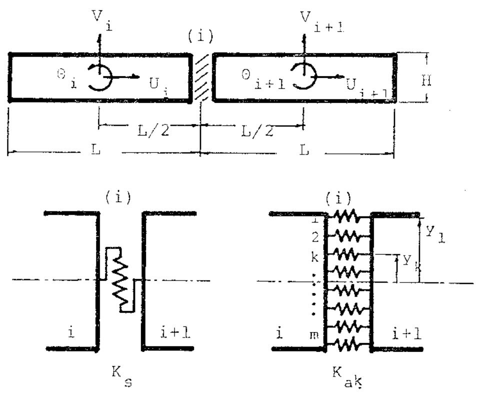
$U_s=U_c$ になるための条件式は　(1)式(3)式(4)式より

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}k_{aki}=EA_i/L,\ \sum_{k=1}^{m}k_{aki}y_{ki}=EA_iy_{oi}/L,\ \sum_{k=1}^{m}k_{aki}y_{ki}^2=EA_ig_{oi}^2/L\\&K_{si}=GA_i/L\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

となる。さらに完全弾塑性体の場合に降伏モーメントと塑性モーメントを正しく表現できるものとして，形状係数 f に関する条件式を導入すると　次式を得る。つまり

$$f=\frac{H}{2}\sum_{k=1}^{m}y_{ki}/r_{ki}^2,\qquad r_{ki}^2=I_{ki}/A_{ki} \qquad (6)$$

したがって(5)式(6)式を満足するように　ばね常数 k_{aki}，k_{si}，ばね位置 y_{ki}，有効断面積 A_{ki} を決定することになる。一例として対称断面部材で，応力－ひずみ関係が線形特性の場合，



(a)Shear spring　　(b)Axial springs

Fig.1 Finite rigid element model

2本ばねモデルと4本ばねモデルにおけるばね常数，ばね位置，有効断面積は，次のようになる。

2本ばねモデル: $A_{1i}=A_{2i}=A_i/2$, $K_{a1i}=EA_{1i}/L$, $k_{a2i}=EA_{2i}/L$, $k_{si}=GA_i/L$, $y_{1i}=-y_{2i}=g_{0i}$ (7)

4本ばねモデル: $A_{1i}=A_{4i}=A_i/8$, $A_{2i}=A_{3i}=3A_i/8$, $K_{a1i}=EA_{1i}/L$, $K_{a2i}=EA_{2i}/L$, $K_{a3i}=EA_{3i}/L$, $K_{a4i}=EA_{4i}/L$

$y_{1i}=-y_{4i}=H/2$, $y_{2i}=-y_{3i}=H/6$, $K_{si}=GA_i/L$ (8)

3. 剛性行列について

(1)式より,最小ポテンシャルエネルギーの原理を基に節点(i)における釣合式は

$$[K]_i\{a\}_i=\{F\}_i \tag{9}$$

$$\{a\}_i=\{u_i, v_i, \theta_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \theta_{i+1}\}^T$$

$$\{F\}_i=\{T_i, S_i, M_i, T_{i+1}, S_{i+1}, M_{i+1}\}^T$$

となる。本解析モデルでの各節点のばね剛性行列$[K]_i$は左図のように与えられる。もし$\sum_{k=1}^{m} k_{aki}=\frac{EA_i}{L}$, $\sum_{k=1}^{m} k_{aki}y_{ki}=\frac{EQ_i}{L}$, $\sum_{k=1}^{m} k_{aki}y_{ki}^2=\frac{EI_i}{L}$, $k_{si}=\frac{GA_i}{L}$と置けるならば，この剛性行列は *1-Point Reduced Integration* を用いて求められた *Timoshenko* 梁の線形要素による剛性行列と座標原点を中立軸に一致させれば，まったく同一になる。すなわち,この有限剛体要素モデルは，有限要素法において優れた結果を与える *Timoshenko* 梁要素と等しくなる。

ΣK_{aki}	SYM.				
0	K_{si}				
$-\Sigma K_{aki}Y_{ki}$	$K_{si}L/2$	$\Sigma K_{aki}Y_{ki}^2+K_{si}L^2/4$			
$-\Sigma K_{aki}$	0	$\Sigma K_{aki}Y_{ki}$	ΣK_{aki}		
0	$-K_{si}$	$-K_{si}L/2$	0	K_{si}	
$\Sigma K_{aki}Y_{ki}$	$K_{si}L/2$	$-\Sigma K_{aki}Y_{ki}^2+K_{si}L^2/4$	$-\Sigma K_{aki}Y_{ki}$	$-K_{si}L/2$	$\Sigma K_{aki}Y_{ki}^2+K_{si}L^2/4$

4. 数値計算例

Fig.2, Fig.3では，片持Deep Beamの弾性問題を計算例として示している。Fig.2は，断面内を等分割し各軸ばねに一様な有効断面積を与え，ばね位置は中心線より各分割要素の重心点までの距離を用いて解析している。軸ばね本数が少ない場合精度が悪く，少なくとも軸ばね本数は20本ぐらい配置する必要がある。Fig.3は，式(7),式(8)を用いて解析した結果である。軸ばね本数が2,4本でも，梁要素が6要素以上であれば厳密解と一致している。

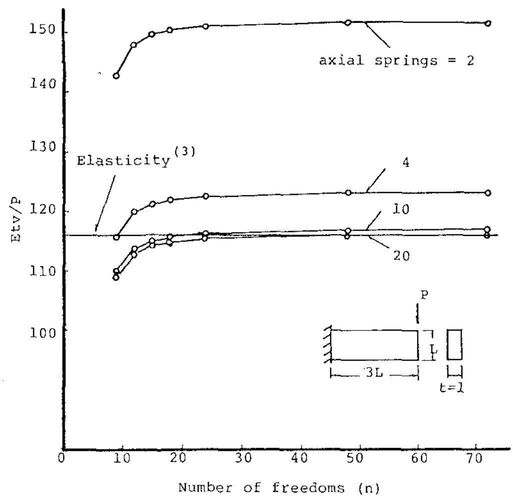


Fig.2 Bounding the cantilever end deflection

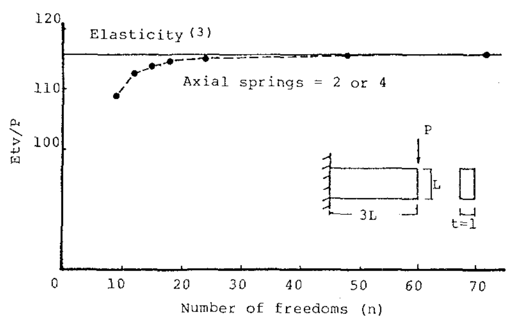


Fig.3 Bounding the cantilever end deflection

5. まとめ

(5)式(6)式の条件にこだわらず，単純にばね配置して弾性解析した場合，梁要素として8要素以上断面内軸ばね本数が20本以上必要になるが，条件を満足した(7)式(8)式であれば非常に良い結果を得た。しかし，部材の応力-ひずみ関係が非線形特性を持ち曲げ変形を生じるものとすると，その状態に応じたばね位置の移動，ばね常数の変更が必要になってくる。

文献

(1) 川井編：「物理モデルによる連続体力学諸問題の解析」生研セミナーテキスト，東大生産技術研究所，1980
(2) 野上，伊藤：「有限剛体要素モデルによる柱の耐荷力解析」第30回応用力学連合講演会，1980
(3) R.F. Hooley, P.D. Hibbert：「Bounding plane stress solutions by Finite elements」，ASCE，1966