

I - 3 薄肉開断面らせんばりの有限変位特性

早稲田大学理工学部 正会員 ○ 依田 照彦
 早稲田大学理工学部 正会員 平嶋 政治
 早稲田大学大学院 学生会員 布山 榎元

1. 考え方

薄肉開断面部材の有限変位特性に関する研究は、平面曲線部材に関しては数多くあり、満足すべき結果が得られていようであるが、空間曲線部材については、まだ検討すべき点が残されているように思われる。

本報告では、薄肉開断面らせん部材の力学的挙動を微小変位と有限変位の両面から検討し、特に非線形解析における高次項の影響および断面定数の影響を調べた。

2. 有限変位問題の定式化

図1に示すよう空初期曲率と初期挾率を有する空間曲線部材の有限変位場は、薄肉直線部材の有限変位理論において使用されている仮定に基づく。その結果を、最低次の非線形問題に限定すれば、局所デカルト座標系(y_1, y_2, y_3)における任意点の変位 U^i ($i=1, 2, 3$)は、部材軸に関する変位成分(v^1, v^2, v^3)と回転角 θ^i を用いて、

$$U^1 = v^1 - y_2(v^2_{,1} + v^3_{,2}) - y_3(v^3_{,1} - v^2_{,3}) \\ - \omega(\theta_{,1} - \frac{1}{2}X_1[(v^2_{,1})^2 + (v^3_{,2})^2] + X_2 v^2_{,1} + X_3 v^3_{,1})$$

$$U^2 = v^2 - y_2 \frac{v^2_{,1}}{2} - y_3 \dot{\theta}^1$$

$$U^3 = v^3 + y_2 \dot{\theta}^2 - y_3 \frac{v^3_{,2}}{2} \quad (1a\sim c)$$

と表わされる。²⁾ここに、 $(\cdot)_{,1}$ は θ^1 に関する偏微分を、 $(\cdot)_{,2}$ は θ^2 に関する偏微分を意味し、 X_1 は初期挾率、 X_2, X_3 は初期曲率である。また、ソリ関数のは初期曲率と初期挾率を考慮したソリ関数である。

三次以上の高次の微小項を無視し、一次元棒理論であることを考慮すれば、局所デカルト座標系でのひずみ-変位関係式として

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}(L_w - y_2 \bar{\varepsilon}_{11} - y_3 \bar{\varepsilon}_{12} - \omega \bar{\varepsilon}_{13} + H^* L_{11} + R \frac{(L_{11})^2}{2}) \quad (2a)$$

$$2\varepsilon_{12} = -\frac{\theta^1}{\sqrt{g}\sqrt{3}} L_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (2b\sim f)$$

が得られる。ここに、変位成分の二次項まで考慮した諸量は

$$\sqrt{g} = 1 + X_2 y_3 - X_3 y_2, \quad \sqrt{3} = 1 + X_2 \dot{y}_3 - X_3 \dot{y}_2 \quad (3a, b)$$

(印は薄肉板厚中心線上の値を示す)

$$L_w = v^4_{,1} + \frac{1}{2}(v^2_{,1})^2 + \frac{1}{2}(v^3_{,2})^2 \quad (3c)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = (v^2_{,1} + v^3_{,2}),_1 - v^3_{,1} v^3_{,2} \\ - X_2 \dot{\theta} - X_3 \frac{v^2_{,1}}{2} - X_1 (v^3_{,1} - v^2_{,2}) \quad (3d)$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = (v^3_{,1} - v^2_{,2}),_1 + v^2_{,1} v^3_{,2} \\ - X_1 \dot{\theta} + X_2 \frac{v^2_{,1}}{2} + X_1 (v^2_{,1} + v^3_{,2}) \quad (3e)$$

$$\bar{\varepsilon}_{13} = (v^3_{,2} - \frac{1}{2}X_1[(v^2_{,1})^2 + (v^3_{,2})^2] \\ + X_2 v^2_{,1} + X_3 v^3_{,1}),_2 \quad (3f)$$

$$L_{11} = v^2_{,2} - \frac{1}{2}X_1[(v^2_{,1})^2 + (v^3_{,2})^2] \\ + X_2 v^2_{,1} + X_3 v^3_{,1} \quad (3g)$$

$$H^* = \frac{X_1}{\sqrt{g}}[(y_2)^2 + (y_3)^2 + X_2 y_2 \omega + X_3 y_3 \omega] \\ - \omega_{,1} + \frac{X_1 \theta^1}{\sqrt{g}\sqrt{3}}(y_2 \dot{y}_{3,2} - y_3 \dot{y}_{2,2}) \quad (3h)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{g}}[(y_2 + X_2 \omega)^2 + (y_3 + X_3 \omega)^2] \quad (3i)$$

$$\textcircled{H} = \theta^3(z + \frac{X_2 \dot{y}_{2,2} + X_3 \dot{y}_{3,2}}{\sqrt{g}} - \theta^3) \quad (3j)$$

と表わせる。

さらK、一次元棒理論における応力-ひずみ関係式は

$$\sigma^{11} = E \varepsilon_{11}, \quad \sigma^{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad (4a, b)$$

とかける。ここに、EはYoung率、Gはせん断弾性係数である。

これら準備の下に、数值計算用の定式化は、次のHellinger-Reissnerの汎関数 Π_R を用いて行った。²⁾

$$\Pi_R = \iiint_V \{ \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} - B(\sigma^{ij}) - p_i \bar{U}^i \} dV \\ - \iint_{S_u} P_i \bar{U}^i ds - \iint_{S_u} T_i (\bar{U}^i - \bar{U}^i) ds \quad (5)$$

ここに、 $B(\sigma^{ij})$ ：コンポーリメントリーエネルギー関数、 p_i ：物体力、 P_i ：表面力、 T_i ：Lagrangeの乗数、 \bar{U}^i ：境界(S_u 上)で規定された変位であり、一次元棒理論の場合には $B(\sigma^{ij})$ は

$$B(\sigma^{ij}) = \frac{1}{2E}(\sigma^{11})^2 + \frac{1}{2G}(\sigma^{12})^2 \quad (6)$$

と表わされる。

従って、式(1)～(6)を利用してすれば、汎関数 Π_R は変位成分(v^1, v^2, v^3, θ^i)、断面力($N, M_z, M_b, H_w, Z, M_p, T$)および外力で表示できる。ただし、断面力の定義は

$$N = \iint_A \sigma^{11} d\theta^2 d\theta^3, \quad M_z = \iint_A \sigma^{11} y_3 d\theta^2 d\theta^3 \quad (7a, b)$$

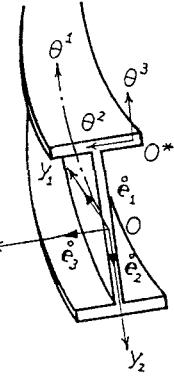


図1 空間曲線部材と座標系

$$M_3 = -\iint_A \sigma^{11} y_2 d\theta^2 d\theta^3, \quad H_{\omega} = \iint_A \sigma^{11} \omega d\theta^2 d\theta^3 \quad (7.c,d)$$

$$Z = \iint_A \sigma^{11} H^* d\theta^2 d\theta^3, \quad M_p = \iint_A \sigma^{11} R d\theta^2 d\theta^3 \quad (7.e,f)$$

$$T = -\iint_A \sigma^{12} \frac{(y_2)}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (7.g)$$

である。

また、断面力と変位の関係は、式(7)に式(2)～(4)を用いることにより、次式のように表わせる。

$$N = EF_1 P_w - EF_2 S_{\theta u} - EF_3 S_{\theta v} - EF_{w3} S_{\theta v} + EF_{h3} P_{\theta} + EF_R \frac{(P_w)}{2}^2 \quad (8.a)$$

$$M_z = EF_3 P_w - EI_{23} S_{\theta u} - EI_{33} S_{\theta v} - EI_{w3} S_{\theta v} + EI_{h3} P_{\theta} + EI_R \frac{(P_w)}{2}^2 \quad (8.b)$$

$$M_3 = -EF_2 P_w + EI_{22} S_{\theta u} + EI_{23} S_{\theta v} + EI_{w2} S_{\theta v} - EI_{h2} P_{\theta} - EI_{R2} \frac{(P_w)}{2}^2 \quad (8.c)$$

$$H_{\omega} = EF_1 P_w - EI_{w2} S_{\theta u} - EI_{w3} S_{\theta v} - EI_{h w} S_{\theta v} + EI_{h h} P_{\theta} + EI_R \frac{(P_w)}{2}^2 \quad (8.d)$$

$$Z = EF_1 P_w - EI_{h2} S_{\theta u} - EI_{h3} S_{\theta v} - EI_{h w} S_{\theta v} + EI_{h h} P_{\theta} + EI_R \frac{(P_w)}{2}^2 \quad (8.e)$$

$$M_p = EF_R P_w - EI_{R2} S_{\theta u} - EI_{R3} S_{\theta v} - EI_{R w} S_{\theta v} + EI_{R h} P_{\theta} + EI_R \frac{(P_w)}{2}^2 \quad (8.f)$$

$$T = G J_t P_{\theta} \quad (8.g)$$

ここに、断面定数は

$$F = \iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad F_2 = \iint_A \frac{y_2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.a,b)$$

$$F_3 = \iint_A \frac{y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad F_{\omega} = \iint_A \frac{\omega}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.c,d)$$

$$F_h = \iint_A \frac{H^*}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad F_R = \iint_A \frac{R}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.e,f)$$

$$I_{22} = \iint_A \frac{(y_2)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{23} = \iint_A \frac{y_2 y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.g,h)$$

$$I_{33} = \iint_A \frac{(y_3)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{w2} = \iint_A \frac{\omega^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.i,j)$$

$$I_{w3} = \iint_A \frac{\omega y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{w\omega} = \iint_A \frac{(w^2)}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.k,l)$$

$$I_{h2} = \iint_A \frac{H^* y_2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{h3} = \iint_A \frac{H^* y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.m,n)$$

$$I_{h\omega} = \iint_A \frac{H^* \omega}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{hh} = \iint_A \frac{(H^*)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.o,p)$$

$$I_{R2} = \iint_A \frac{R y_2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{R3} = \iint_A \frac{R y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.q,r)$$

$$I_{R\omega} = \iint_A \frac{R \omega}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{Rh} = \iint_A \frac{R H^*}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.s,t)$$

$$I_{RR} = \iint_A \frac{(R^2)}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad J_t = \iint_A \frac{(\phi)}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad (9.u,v)$$

である。

以上のことより、混合型有限要素法の定式化に従い、各要素内の断面力と変位成分を節点力と節点変位を未知量として1次関数で近似し、境界条件と節点外力を与えると、汎関数 Π_R の停留条件より、非線形連立方程式が得られる。さらに、Newton-Raphson法を用いて、非線形連立方程式の解を求めた。ただし、本報告の非線形連立方程式では、未知量に関する3次以上の高次の微小項を無視し、最低次の非線形方程式に限定している。

3. 数値計算結果および考察

数値計算に使用したモデルは、幅3cm、厚さ0.3cmの矩形断面を持つ、ヤング率 $E = 2.99 \times 10^6 \text{ kN/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.304$ 、初期係数 $X_1 = -0.0044 \text{ cm}^{-1}$ 、初期曲率 $X_2 = 0$ 、 $X_3 = 0.0259 \text{ cm}^{-1}$ 、軸線長 $l = 59.7 \text{ cm}$ の片持ちらせん部材で

ある。

数値計算の結果、らせん部材に横力を作用させた場合の有限変位問題においては、部材軸の伸びを無視し、不伸長変形としても、計算結果に差異は見られなかつた。また、空間曲線部材の解析においては、一般に断面定数の計算が煩雑となることが、式(9)から予想される。そこで、直線部材としての断面定数を用いてらせん部材の線形解および非線形解を求めた。その結果を図2、図3に示す。これら2つの図から分るように、直線部材としての断面定数を用いて数値計算を行つたとしても、通常の初期曲率と初期係数を有するらせん部材では、十分妥当な値が得られることが確かめられた。

参考文献

1) 平島・井浦・依田：土木学会論文報告集、No.292, 1972.12.

2) Washizuka, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 1975.

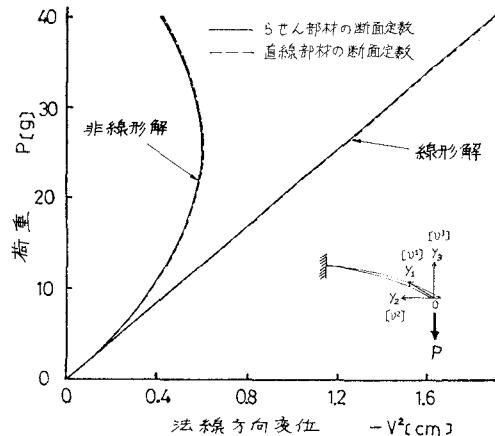


図2 荷重Pと法線方向変位 $-V^2$ の関係

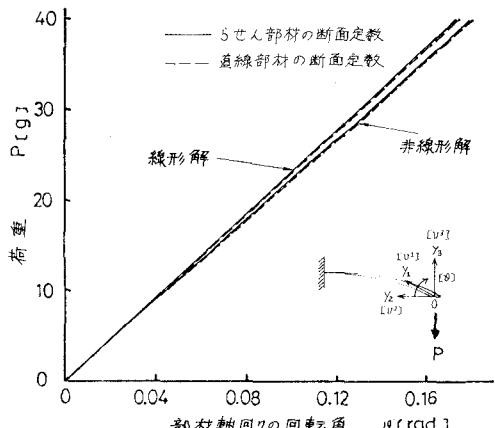


図3 荷重Pと断面回転角 ϕ の関係