

# I-1 薄肉らせんばりの近似解析手法に関する考察

早稲田大学大学院 学生会員 ○布山 裕之  
早稲田大学理工学部 正会員 平嶋 政治  
早稲田大学理工学部 正会員 依田 照彦

## 1. まえがき

通常、らせんばりの設計には、らせんばりを等価な円弧ばりに置き換えるという手法が用いられている。しかし、この方法では主たる変位、断面力の値は得られるものの、近似的にせよ、らせんばりとしての挙動を把握するのは困難である。そこで、本報告では一次元棒理論に基づく薄肉空間曲線部材の平衡方程式を固有値問題を介して厳密に解くことにより解析解を求め、先に薄肉円弧ばりにおいて妥当性が確かめられた折れ線近似モデル<sup>1)</sup>の薄肉らせんばりへの適用について調べた。

## 2. 解析解

曲率および捩率の一定な開断面薄肉空間曲線部材の微小変位理論は平嶋、恵谷<sup>2)</sup>により定式化されている。その平衡方程式を本報告では使用した。平衡方程式、断面力-変位関係から断面力を消去し、さらに $y_3-y_1$ 平面内の棒軸の曲率 $\kappa_2$ 、および分布荷重を零とすれば独立な変位成分 $(u^1, u^2, u^3, \vartheta)$ 表示の薄肉らせん部材の平衡方程式は以下になる。なお、通常の構造物においては初期捩率が小さく薄肉らせんばり特有の断面定数の影響が小さいので、これらを含んだ項を零とした。

$$A_1 u_{,111}^1 + A_2 u_{,11}^1 + A_3 u_{,1}^1 + A_4 u_{,111}^2 + A_5 u_{,11}^2 + A_6 u_{,1}^2 + A_7 u^2 + A_8 u_{,111}^3 + A_9 u_{,11}^3 + A_{10} u_{,1}^3 + A_{11} u^3 + A_{12} \vartheta_{,111} + A_{13} \vartheta_{,11} + A_{14} \vartheta_{,1} + A_{15} \vartheta = 0 \quad (1 \cdot a)$$

$$B_1 u_{,111}^1 + B_2 u_{,11}^1 + B_3 u_{,1}^1 + B_4 u^1 + B_5 u_{,111}^2 + B_6 u_{,11}^2 + B_7 u_{,1}^2 + B_8 u^2 + B_9 u_{,111}^3 + B_{10} u_{,11}^3 + B_{11} u_{,1}^3 + B_{12} u^3 + B_{13} \vartheta_{,111} + B_{14} \vartheta_{,11} + B_{15} \vartheta_{,1} + B_{16} \vartheta = 0 \quad (1 \cdot b)$$

$$C_1 u_{,111}^1 + C_2 u_{,11}^1 + C_3 u_{,1}^1 + C_4 u^1 + C_5 u_{,111}^2 + C_6 u_{,11}^2 + C_7 u_{,1}^2 + C_8 u^2 + C_9 u_{,111}^3 + C_{10} u_{,11}^3 + C_{11} u_{,1}^3 + C_{12} u^3 + C_{13} \vartheta_{,111} + C_{14} \vartheta_{,11} + C_{15} \vartheta_{,1} + C_{16} \vartheta = 0 \quad (1 \cdot c)$$

$$d_1 u_{,111}^1 + d_2 u_{,11}^1 + d_3 u_{,1}^1 + d_4 u^1 + d_5 u_{,111}^2 + d_6 u_{,11}^2 + d_7 u_{,1}^2 + d_8 u^2 + d_9 u_{,111}^3 + d_{10} u_{,11}^3 + d_{11} u_{,1}^3 + d_{12} u^3 + d_{13} \vartheta_{,111} + d_{14} \vartheta_{,11} + d_{15} \vartheta_{,1} + d_{16} \vartheta = 0 \quad (1 \cdot d)$$

ここに、 $A_i$  ( $i = 1 \sim 15$ )、 $B_i$ 、 $C_i$ 、 $d_i$  ( $i = 1 \sim 19$ )は、 $y_2-y_1$ 平面内の棒軸の曲率 $\kappa_2$ 、棒軸の捩率 $\tau$ 、弾性係数 $E$ 、せん断弾性係数 $G$ 、および断面定数( $A$ 、 $J_{y_2 y_2}$ 、 $J_{y_1 y_1}$ 、 $J_{y_2 y_3}$ 、 $J_{\omega y_1}$ 、 $J_{\omega \omega}$ 、 $J_{T \rho}$ 、 $i = 2, 3$ )を含む定数であるが紙面の都合上省略する。また、 $(\cdot)_{,1}$ は棒軸方向座標 $\theta^1$ に関する微分を意味している。

この4元14階連立定数係数微分方程式の一般解を求めるにあたり、特性根を代数方程式の根としてではなく固有値問題の固有値として求め、さらに $u^1, u^2, u^3, \vartheta$ の各係数間の関係式を固有値ベクトルより得るという手法<sup>3)</sup>を用いた。この固有値問題より得られた一般解を薄肉らせんばりの境界条件に代入し解析解を得た。

ここで、薄肉らせんばりの断面定数と平面曲線半径 $R$ の関係を、フランジ幅 $a = 0.5 \text{ m}$ 、高さ $b = 2.5 \text{ m}$ 、フ

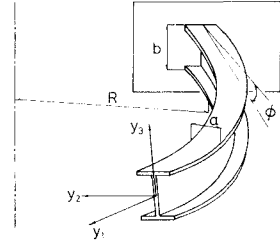


図1. 全体図 および 座標系

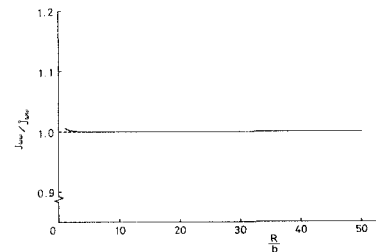


図2. 扇形慣性モーメント $J_{\omega y_1}$ と平面曲線半径 $R$ の関係

ランジ厚  $t_f = 2.5\text{cm}$ ，ウェブ厚  $t_w = 1.0\text{cm}$  の二軸対称薄肉工型断面のピッチ角  $\phi = 6^\circ$  における扇形慣性モーメント  $J_{ww}$  を例にとり、図2に示す。( ) は直線ばりの断面定数を意味している。

### 3. 近似解

本報告では、近似解を得る最も簡単な手法の一つである直接剛性法を用いて近似解を算出した。ここで剛性マトリックスは薄肉直線ばりの主座標系における平衡方程式<sup>4)</sup>

$$E \ddot{A} u_{,11} = 0 \quad (2 \cdot a)$$

$$E \ddot{J}_{y_2 y_2} u_{,1111} = q_2 \quad (2 \cdot b)$$

$$E \ddot{J}_{y_3 y_3} u_{,1111} = q_3 \quad (2 \cdot c)$$

$$E \ddot{J}_{ww} \varphi_{,1111} - G \ddot{J}_{TD} \varphi_{,11} = m_1 \quad (2 \cdot d)$$

より作成したものを使用した。個々の要素剛性マトリックスを重ね合わせて全体剛性マトリックスを作成する際、 $y_2$ 軸が常にらせん部材の円柱座標系の基準横断面に平行になるように個々の剛性マトリックスに座標変換を施した。この結果、近似的にはあるが棒軸の振率  $\rho$  が折れ線近似モデルに導入された。

### 4. 解析解と近似解の比較

薄肉らせんばりにおける折れ線近似モデルの妥当性を示すために、先に示した断面を有する部材長  $l = 62.83\text{m}$ 、平面曲線半径  $R = 40\text{m}$ 、ピッチ角  $\phi = 6^\circ$  の片持ちばりの自由端、断面圆心に鉛直方向荷重  $0.01\text{t}$  を載荷させたときの数値計算結果を図3～5に示す。

このとき、材料定数は弾性係数  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比  $\nu = 0.30$  を用いた。図中においては曲線は解析解を表し、プロットは5要素折れ線近似モデルの値である。等価円弧ばりでは算出し得ない  $u$ 、 $N$  の挙動を折れ線近似モデルの値が的確に捉えている点に注目されたい。

### 5. あとがき

本報告では、薄肉らせんばりに対する折れ線近似モデルの妥当性を固有値問題を介して得られた解析解と比較することにより確めた。等価円弧ばりにおいては、薄肉らせんばりの挙動を的確に把握できないばかりではなく、等価円弧ばりとしていかなる図形を用いるかについては明確にされておらず、この点についても一義的に定まる。折れ線近似モデルは、薄肉らせんばりの簡易解析手法として優れているものと思われる。本報告では二軸対称断面を用いたため、圆心のみが薄肉直線ばりの主座標系のもとで作成された折れ線近似モデルの解析軸となったが、任意形状の断面を有する薄肉らせんばりへの折れ線近似モデルの適用を今後の課題としたい。

おわりに、固有値問題を介して連立定数係数微分方程式の厳密解を求めるプログラムを作成するにあたり、東京電機大学・助手・井浦雅司先生に有益な助言を頂いた。記して謝意を表します。なお、数値計算は東京大学大型計算機センターの M-200H を使用して行い、固有値問題の解は MS-LI のうち  $\text{MEF1M}$  より求めた。

- 参考文献 1) 市山・依田・平嶋：薄肉円弧ばりの近似解析手法に関する考察，第31回応用力学連合講演会講演論文集録集，1981年11月。  
2) 平嶋・恵谷：開断面薄肉らせんばりの理論，土木学会論文報告集，第281号，1979年1月。  
3) 井浦雅司：非閉鎖形変断面円錐殻のフーリエ解析，昭和56年度日本建築学会大会学術講演梗概集，1981年9月。  
4) 奥村敏恵・他共訳：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967年。

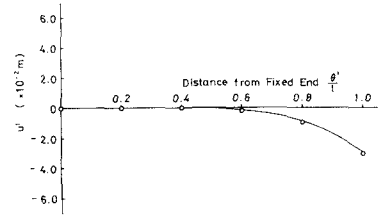


図3. 鉛直方向荷重載荷時における  $y_1$  方向変位  $u$

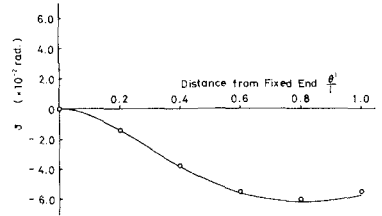


図4. 鉛直方向荷重載荷時における断面回転角  $\phi$

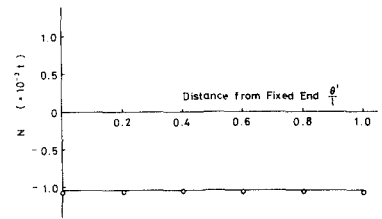


図5. 鉛直方向荷重載荷時における軸力  $N$