I－6　梁・平板の有限変位問題に対する一般的な支配方程式

山梨大学・工学部　正員　平島健一

1. まえがき

幾何学的な非線形性を考慮した梁・平板の理論は従来から極めて多数の研究者によって取り扱われてきている。本文では古典弾性論に立脚点を置き，変位 $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ を梁・平板の厚さ方向の座標 x_2 に関して級数展開することによって理論的な定式化を行ない，従来までに発表された主たる研究結果との関連について記述することを目的としたものである。

2. 支配方程式の誘導

まず平板の問題に対する定式化について記述する。最初に変位仮定として式(1)のように一般的な変位 u_j を板厚方向座標 x_2 に関してベキ級数に展開できるものと仮定する。これより Green のひずみテンソル e_{ij} は変位係数 $u_j^{(n)}$ を用いて式(2)のように求められる。この式中の δ_{ij} は Kronecker delta を意味し，また指標のうちラテン文字は 1,2,3 を，ギリシア文字は 1,3 の値をとるものとする。次に Kirchhoff 応力 σ_{ij} と e_{ij} の間に Hooke の法則が成立するとすれば，σ_{ij} は $u_l^{(n)}$ によって式(3)のように表示される。σ_{ij} の中立軸（$x_1 = x_3 = 0$ の面）に関する n 次モーメントを $\sigma_{ij}^{(n)}$ と定義すれば式(4)の如く求められる。ここで

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{15}\\ & C_{22} & C_{23} & C_{25}\\ & & C_{33} & C_{35}\\ (\mathrm{Sym.}) & & & C_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ e_{13}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\sigma_{23}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{44} & C_{46}\\ C_{46} & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$$

のような直交異方性を考えれば $\sigma_{ij}^{(n)}$ は具体的に式(4)′で与えられる。等方性の場合には式(4)′の C_{ij} の代りに式(4)″を用いればよい。

ここで，一般化 Hamilton 原理を導入する。

$$\delta\int_{t_0}^{\hat{t}_0} dt\int_V (T-U)\,dV + \int_{t_0}^{\hat{t}_0} dt\left[\int_S t_j\,\delta u_j\,dS + \int_V f_j\,\delta u_j\,dV\right] = 0,$$

ここに，

$$\delta\int_V U\,dV = \int_V \sigma_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV,\quad \delta\int_V T\,dV = \int_V \rho\ddot{u}_j\,\delta u_j\,dV.$$

(A) Displacement assumption:

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n \cdot u_j^{(n)}(x_1, x_3, t), \quad\cdots\cdots(1)$$

(B) Green strain tensor:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x_2^n\{(\delta_{j\alpha}u_{i,\alpha}^{(n)} + \delta_{i\alpha}u_{j,\alpha}^{(n)}) + (n+1)(\delta_{j2}u_i^{(n+1)} + \delta_{i2}u_j^{(n+1)})\}\\ &\quad + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_2^{n+m}\{\delta_{i\alpha}u_{k,\alpha}^{(n)} + \delta_{i2}(n+1)u_k^{(n+1)}\}\{\delta_{j\beta}u_{k,\beta}^{(m)} + \delta_{j2}(m+1)u_k^{(m+1)}\}; \quad\cdots(2)\end{aligned}$$

(explicit form)

$$\left.\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n \cdot u_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_2^{n+m}u_{k,1}^{(n)}u_{k,1}^{(m)},\\ e_{22} &= \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n(n+1)u_2^{(n+1)} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n+1)(m+1)x_2^{n+m}u_k^{(n+1)}u_k^{(m+1)},\\ e_{12} &= \tfrac{1}{2}\sum_n x_2^n\{u_{2,1}^{(n)} + (n+1)u_1^{(n+1)}\} + \tfrac{1}{2}\sum_n\sum_m (m+1)x_2^{n+m}u_{k,1}^{(n)}u_k^{(m+1)},\\ e_{13} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x_2^n(u_{1,3}^{(n)} + u_{3,1}^{(n)}) + \tfrac{1}{2}\sum_n\sum_m x_2^{n+m}u_{k,1}^{(n)}u_{k,3}^{(m)},\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)'$$

(C) Kirchhoff stress-displacement coefficient relations:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}e_{kl}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n\{C_{ij\alpha l}u_{l,\alpha}^{(n)} + (n+1)C_{ij2l}u_l^{(n+1)}\} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_2^{n+m}\{C_{ij\alpha\beta}u_{p,\alpha}^{(n)}u_{p,\beta}^{(m)}\\ &\quad + 2(m+1)C_{ij2\alpha}u_{p,\alpha}^{(n)}u_p^{(m+1)} + (n+1)(m+1)C_{ij22}u_p^{(n+1)}u_p^{(m+1)}\}; \quad\cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

(D) Stress resultant-displacement coefficient relations:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \int_{-b}^{b} x_2^n \cdot \sigma_{ij}\,dx_2 \qquad (2b:\ \text{plate thickness})$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\{C_{ij\alpha l}u_{l,\alpha}^{(m)} + (m+1)C_{ij2l}u_l^{(m+1)}\} + \tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} I^{n+m+k}\{C_{ij\alpha\beta}u_{p,\alpha}^{(m)}u_{p,\beta}^{(k)}\\ &\quad + 2(k+1)C_{ij2\alpha}u_{p,\alpha}^{(m)}u_p^{(k+1)} + (m+1)(k+1)C_{ij22}u_p^{(m+1)}u_p^{(k+1)}\}; \quad\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

where, $I^n = \int_{-b}^{b} x_2^n\,dx_2 = \hat{\delta}_n\dfrac{2b^{n+1}}{n+1}$, $\quad \hat{\delta}_n = \begin{cases}1, & n:\text{even},\\ 0, & n:\text{odd}.\end{cases}$

(explicit form) [Orthotropic case]

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}^{(n)} &= \sum_m I^{n+m}\{C_{11}u_{1,1}^{(m)} + C_{15}(u_{1,3}^{(m)} + u_{3,1}^{(m)}) + C_{13}u_{3,3}^{(m)} + (m+1)C_{12}u_2^{(m+1)}\} + \tfrac{1}{2}\sum_m\sum_k I^{n+m+k}\times\\ &\quad\times\{C_{11}u_{p,1}^{(m)}u_{p,1}^{(k)} + C_{15}(u_{p,1}^{(m)}u_{p,3}^{(k)} + u_{p,1}^{(k)}u_{p,3}^{(m)}) + C_{13}u_{p,3}^{(m)}u_{p,3}^{(k)} + (m+1)(k+1)C_{12}u_p^{(m+1)}u_p^{(k+1)}\},\\ \sigma_{22}^{(n)} &= \sum_m I^{n+m}\{C_{12}u_{1,1}^{(m)} + C_{25}(u_{1,3}^{(m)} + u_{3,1}^{(m)}) + C_{23}u_{3,3}^{(m)} + (m+1)C_{22}u_2^{(m+1)}\} + \tfrac{1}{2}\sum_m\sum_k I^{n+m+k}\times\\ &\quad\times\{C_{12}u_{p,1}^{(m)}u_{p,1}^{(k)} + C_{25}(u_{p,1}^{(m)}u_{p,3}^{(k)} + u_{p,1}^{(k)}u_{p,3}^{(m)}) + C_{23}u_{p,3}^{(m)}u_{p,3}^{(k)} + (m+1)(k+1)C_{22}u_p^{(m+1)}u_p^{(k+1)}\},\\ \sigma_{12}^{(n)} &= \sum_m I^{n+m}\{C_{66}u_{2,1}^{(m)} + C_{46}u_{2,3}^{(m)} + (m+1)(C_{66}u_1^{(m+1)} + C_{46}u_3^{(m+1)})\}\\ &\quad + \sum_m\sum_k (k+1)I^{n+m+k}(C_{66}u_{p,1}^{(m)}u_p^{(k+1)} + C_{46}u_{p,3}^{(m)}u_p^{(k+1)}),\\ \sigma_{13}^{(n)} &= \sum_m I^{n+m}\{C_{15}u_{1,1}^{(m)} + C_{55}(u_{1,3}^{(m)} + u_{3,1}^{(m)}) + C_{35}u_{3,3}^{(m)} + (m+1)C_{25}u_2^{(m+1)}\} + \tfrac{1}{2}\sum_m\sum_k I^{n+m+k}\times\\ &\quad\times\{C_{15}u_{p,1}^{(m)}u_{p,1}^{(k)} + C_{55}(u_{p,1}^{(m)}u_{p,3}^{(k)} + u_{p,1}^{(k)}u_{p,3}^{(m)}) + C_{35}u_{p,3}^{(m)}u_{p,3}^{(k)} + (m+1)(k+1)C_{25}u_p^{(m+1)}u_p^{(k+1)}\},\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)'$$

[Isotropic case]

$$\left.\begin{aligned}&C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu,\quad C_{12} = C_{23} = C_{13} = \lambda,\\ &C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu,\quad \text{other } C_{ij} = 0.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)''$$

t_jは表面力，f_jは物体力を表わす．

上式に式(1)〜(4)を代入し整理すると最終的に式(5)および式(6)のような支配方程式および境界条件式が求められる。

3．項数の打ち切り．

いま，具体例として変位係数$u_i^{(n)}$のうち$u_i^{(0)}$および$u_\alpha^{(1)}$までの項数を採用すれば．

$$\left.\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1}^{(0)} + \tfrac{1}{2}(u_{2,1}^{(0)})^2 + x_2 u_{1,1}^{(1)}, \\ e_{22} &= 0, \quad e_{12} = \tfrac{1}{2}(u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)}), \\ e_{13} &= \tfrac{1}{2}(u_{1,3}^{(0)} + u_{3,1}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)} u_{2,3}^{(0)}) + \tfrac{1}{2}x_2(u_{1,3}^{(1)} + u_{3,1}^{(1)}), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

となり，$\sigma_{2j}^{(n)}$は式(4)に上記の項数打ち切りした変位係数で表示される．

ここで，さらに$\sigma_{ij}^{(n)}$のうち$\sigma_{ij}^{(0)}$および$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$まで

(E) <u>n-th order stress equations of motion</u>:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{\alpha j,\alpha}^{(n)} - n\,\sigma_{2j}^{(n-1)} + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} + \hat{K}_j^{(n)} = \rho \sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\, \ddot{u}_j^{(m)}, \\ &\text{where,} \\ &\hat{K}_j = \sum_{m=0}^{\infty}\Big\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(n+m)} u_{j,\alpha\beta}^{(m)} + [\sigma_{\alpha\beta,\alpha}^{(n+m)} + (m-n)\sigma_{2\beta}^{(n+m-1)}]\, u_{j,\beta}^{(m)} \\ &\qquad + (m+1)(\sigma_{2\alpha,\alpha}^{(n+m)} - n\,\sigma_{22}^{(n+m-1)})\, u_j^{(m+1)} \Big\}, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5)$$

【<u>boundary conditions</u>】

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{T}_j^{(n)} &= \int_{-b}^{b} x_2^n \{ n_\alpha \sigma_{\alpha k}(\delta_{kj} + u_{j,k}) \}_C \, dx_2, \\ &= n_\alpha \Big\{ \sigma_{\alpha j}^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty} [\sigma_{\alpha\beta}^{(n+m)} u_{j,\beta}^{(m)} + (m+1)\sigma_{2\alpha}^{(n+m)} u_j^{(m+1)}] \Big\}. \quad \text{on } C, \\ &\text{or} \\ \bar{u}_j^{(n)} &= u_j^{(n)} \quad \text{on } C. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(6)$$

in which,

$$\left.\begin{aligned} F_j^{(n)} &= [x_2^n \sigma_{2k}(\delta_{kj} + u_{j,k})]_{-b}^{b} = \Big[x_2^n \sigma_{2j} + \sum_{m=0}^{\infty} x_2^n \{\sigma_{2\alpha} u_{j,\alpha}^{(m)} + (m+1)\sigma_{22} u_j^{(m+1)}\}\Big]_{-b}^{b}, \\ f_j^{(n)} &= \int_{-b}^{b} x_2^n f_j \, dx_2, \end{aligned}\right\}$$

を採用するものとすれば，支配方程式(5)は次式のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{11,1}^{(0)} + \sigma_{13,3}^{(0)} + F_1^{(0)} + \underline{f_1^{(0)}} + \{\underline{(\sigma_{11}^{(0)} u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{13}^{(0)} u_{1,3}^{(0)}} + \underline{\sigma_{12}^{(0)} u_1^{(1)}}) + (\underline{\sigma_{11}^{(1)} u_{1,1}^{(1)} + \sigma_{13}^{(1)} u_{1,1}^{(1)}})\}_{,1} + \{(\underline{\sigma_{13}^{(0)} u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)} u_{1,3}^{(0)}} + \underline{\sigma_{23}^{(0)} u_1^{(1)}}) + (\underline{\sigma_{13}^{(1)} u_{1,1}^{(1)} + \sigma_{33}^{(1)} u_{1,3}^{(1)}})\}_{,3} = 2b\rho \ddot{u}_1^{(0)}, \\ &\sigma_{12,1}^{(0)} + \sigma_{23,3}^{(0)} + F_2^{(0)} + \underline{f_2^{(0)}} + (\sigma_{11}^{(0)} u_{2,1}^{(0)} + \sigma_{13}^{(0)} u_{2,3}^{(0)})_{,1} + (\sigma_{13}^{(0)} u_{2,1}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)} u_{2,3}^{(0)})_{,3} = 2b\rho \ddot{u}_2^{(0)}, \\ &\sigma_{11,1}^{(1)} + \sigma_{13,3}^{(1)} - \sigma_{12}^{(0)} + F_1^{(1)} + \underline{f_1^{(1)}} + (\underline{\sigma_{11}^{(1)} u_{1,1}^{(0)}} + \underline{\sigma_{13}^{(1)} u_{1,3}^{(0)}})_{,1} + (\underline{\sigma_{13}^{(1)} u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{33}^{(1)} u_{1,3}^{(0)}})_{,3} - (\underline{\sigma_{12}^{(0)} u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{23}^{(0)} u_{1,3}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} u_1^{(1)}}) = \tfrac{2}{3}b^3\rho \ddot{u}_1^{(1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots(7)$$

4．従来までの研究との関係．

Chu & Herrmann[1]の結果は式(7)において下線(実線および点線)の項を無視したものに等しくなる．Singh & Others[2]は下線(実線)の項を無視し，式$(7)_3$から$\sigma_{12}^{(0)} \doteqdot \sigma_{11,1}^{(1)} + \sigma_{13,3}^{(1)}$を求め，その結果を$(7)_1$に代入して求めたものと一致する。von Kármán 理論[3),4)]は$\ddot{u}_\alpha^{(0)} = \ddot{u}_\alpha^{(1)} = 0$，$F_\alpha^{(0)} = F_\alpha^{(1)} = 0$と置き，下線(実線および点線)の項を無視すると共に，せん断変形無視の仮定(i.e. $u_\alpha^{(1)} = -u_{2,\alpha}^{(0)}$)を導入したものに等しくなる．Wu & Vinson[5)]はせん断変形(i.e. $u_\alpha^{(1)}$の独立性)を考慮しているが，得られた基礎式の線形化をはかるためにBergerの手法[6)](i.e. ひずみエネルギ式中のmembrane strainsに関する第2不変量を無視することによってvon Kármán 理論の基礎式の線形化を行なう手法)を利用している．したがって得られた結果は文献2)を特殊化したものに相当する。Novozhilov[7)]のいう"strong bending"は$u^{(1)}$までを考慮するが，断面剛の仮定(i.e. $e_{22} = e_{12} = e_{23} = 0$)を導入して得られるものに等価である。また，中川·阿井·西野の結果[8)]はNovozhilovの考えを特殊化したものであり，式(7)で$\ddot{u}_i^{(0)} = \ddot{u}_\alpha^{(1)} = 0$，$F_\alpha^{(1)} = 0$とし下線(実線)の項を無視した上で，$(7)_3$から$\sigma_{2\alpha}^{(0)}$を求め，その結果と断面剛の仮定から得られる$u_\alpha^{(1)} = -u_{2,\alpha}^{(0)}$とを$(7)_1$の点線の項に代入した結果に一致する。

なお，梁の場合には上記で定式化したすべての式のうちx_3方向の座標で偏微分される項をすべて消去してやればよい。梁理論に関する西野·倉方·後藤の結果[9)]は，上式で$u_3^{(0)} = u_3^{(1)} = 0$，$\ddot{u}_i^{(0)} = \ddot{u}_i^{(1)} = 0$，$F_i^{(1)} = 0$と置き，$u_1^{(1)} = -u_{2,1}^{(0)} = -\sin\alpha$として整理したものに基本的に一致する。　その他の論文との関連については学会当日発表する．

5．参考文献

1) Chu, H.N. & Herrmann, G; Jour. Appl. Mech. (1956), pp. 532〜540,　2) Singh, P.N., Das, Y.C. & Sundararajan, V.; Jour. Sound Vib., Vol.17 (1971), pp. 235-240.　3) Y.C.ファン著(大橋他訳)：「固体の力学/理論」培風館(1970), pp.470〜477.　4) Chia, C.Y.: "Nonlinear Analysis of Plates", McGraw-Hill (1980), pp.1〜107,　5) Wu, C.I. & Vinson, J.R.; Jour. Appl. Mech. (1969), pp. 254〜260.　6) Berger, H.M.; Jour. Appl. Mech. (1955), pp.465〜472.
7) Novozhilov, V.V.: Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity", Graylock Press (1953), pp. 177〜183.
8) 中川茂，阿井正博，西野文雄：「薄板の有限変位解析に関する一考察」第31回土木学会年次講演会(1976), 第I部, pp. 81〜82.　9) 西野文雄·倉方慶夫·後藤芳顕：「一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位問題」土木学会論文報告集，第237号(1975), pp. 11〜26.