

早稲田大学大学院 学生会員 ○布山 裕之

早稲田大学理工学部 正会員 依田 照彦

早稲田大学理工学部 正会員 平嶋 政治

1. まえがき

従来、曲線橋やアーチ橋の設計には、曲線部材を直線部材の集合に置き換える、という手法が、広く用いられている。その手法の妥当性は、曲率平面内（以下、面内）で曲げと軸力を受ける、円弧部材やアーチ橋に関しては、既に数多く報告されているが、^{(1), (2)} 曲率平面外（以下、面外）の力学的挙動を扱った、曲線橋に関する報告はほとんどない。本報告では、面外荷重を載荷させた場合の薄肉閉断面を有する曲線部材に関し、つり合い方程式の厳密解を求め、バイモーメントを考慮した、折れ線モデルの値と比較し、面外挙動に対する、折れ線近似の妥当性を考察した。

2. 解析解

薄肉平面曲線部材の微小変位理論は、西野・深沢⁽²⁾により統一的に定式化されている。そのつり合い方程式を本報告では使用した。

一般に、曲線部材においては、断面が二軸対称であるとしても、中立点とそり中心（せん断中心）は一致しない。ここでは、つり合い方程式を簡単にするため、一致するとし、その点を断面の座標原点とする。この時、つり合い方程式は面外挙動を支配する式と面内挙動を支配する式とに分かれる。

つり合い方程式、断面力-変位関係から断面力を消去し、さらに分布荷重を零とすれば、変位成分表示の面外のつり合い式は、以下のようになる。ただし、 ψ は中心角 θ に関する微分を意味する。

$$-\frac{EJ_x}{R^2}(\psi'' + R\psi') + \frac{EC_w}{R^3}(\psi'' - \frac{\psi''}{R}) - \frac{GJ_{st}}{R}(\psi'' - \frac{\psi''}{R}) = 0 \quad (1.a)$$

$$-\frac{EJ_x}{R^2}(\psi'' + R\psi') - \frac{EC_w}{R^3}(\psi'' - \frac{\psi''}{R}) - \frac{GJ_{st}}{R}(\psi'' - \frac{\psi''}{R}) = 0 \quad (1.b)$$

この連立定数係数微分方程式を解き、積分定数8個を有する ψ 及び ψ' の一般解を求めた。数値計算例として、薄肉片持ちばりの境界条件（固定端； $\psi = \psi' = \psi'' = \psi''' = 0$ ，自由端； $M_x = \bar{M}_x$ ， $Q_y = \bar{Q}_y$ ， $M_w = \bar{M}_w$ ， $T = \bar{T}$ ）を用い、積分定数を決定した。これに基づき、面外荷重を自由端に載荷させた場合の静的挙動を解析した。

3. 近似解

折れ線近似の妥当性を示す計算例として、中心角 $\theta_0 = 1.111 \text{ rad.}$ ，

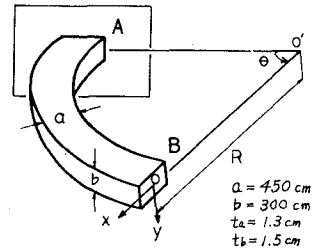
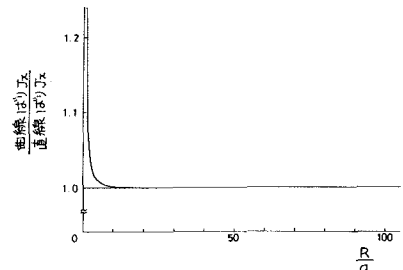
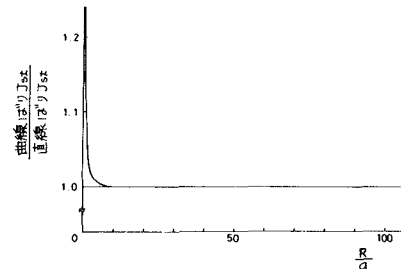
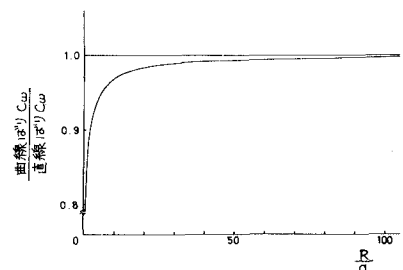


図1. 全体図、及び、座標系

図2. 断面二次モーメント J_x の収束図3. St. Venant のねじり定数 J_{st} の収束図4. 扇形慣性モーメント C_w の収束

曲率半径 R と断面幅 a の比 $R/a = 10$ を有する曲線片持ちばりを5本の直線部材に置き換え、近似モデルとした。なお、直線要素数を変えた近似モデルについては講演会当日報告する予定である。

面外挙動に関係した閉断面薄肉曲線ばりの断面定数は、 $R/a = 10$ ではほぼ直線ばりのものに一致するので(図2, 3, 4)、近似モデルには、直線ばりの断面定数を使用した。

薄肉断面部材の解析で問題になるバイモーメントは、閉断面部材の場合には、曲率の影響を受けにくいことがつり合い式を直接解くことにより判明したので、直線部材間でバイモーメントを座標変換することなく伝達する、全体剛性マトリックスを作成した。その際、要素剛性マトリックスとして、薄肉直線部材の面外のつり合い式⁴⁾：

$$EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \quad (2.a) \quad EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GJ_{sx} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0 \quad (2.b)$$

の厳密解より作成したものをを使用した。ただし、 z は棒軸方向に関する座標である。

4. 数値計算結果

本報告では、折れ線近似の妥当性を検討するために、曲線片持ちばりの自由端にねじり荷重 T と面外曲げモーメント荷重 $\bar{M}_x$ を載荷させた時の、数値計算結果を図示した(図5~9)。図中において曲線は解析解を、プロットは近似解を示している。

解析解と近似解を比較した時、この結果は面外鉛直変位については、妥当な結果を与えているが、断面回転角については、分割要素数の不足のため、若干誤差が生じている。一方、断面力については変位法を用いたことから予想されるように、また断面力以外は、良い近似を与えていないことが判明した。

5. あとがき

本報告では、薄肉閉断面曲線部材の面外のつり合い方程式に着目し、微分方程式の解析解を求め、薄肉直線部材の厳密解を利用した折れ線近似解と比較し、折れ線近似の妥当性及び有用性を検討した。

附言するならば、軸の選定の際解析軸として二軸対称断面の固心軸を採用し、断面定数の近似計算を行ったため、厳密な解析解との比較を行ったとは必ずしも言い難いが、このことによる誤差は、数値計算上ほとんど無視できるものと思われる。現在、軸の位置を正確に把握した数値計算を行っている。

なお、数値計算は東京大学大型計算機センターの M-200H を使用して行った。

参考文献

- 1) H.C. マーチン：マトリックス法による構造力学の解法，培風館，1967年。
- 2) 菊地文雄：はり要素によるアーチの近似について，第29回応力連合講演会，1979年10月。
- 3) 西野・深沢：びずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，1976年3月。
- 4) W. S. Wassov：Dünnwandige elastische Stäbe，Band I，VEB Verlag，1964年。

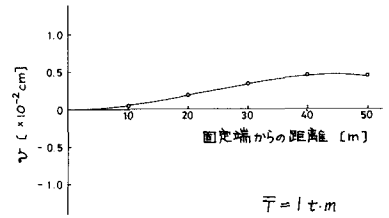


図5. ねじり荷重 T 載荷時の鉛直変位 v

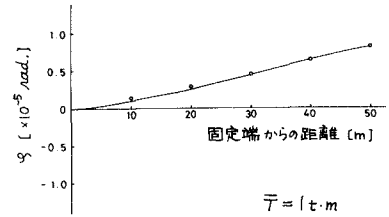


図6. ねじり荷重 T 載荷時の断面回転角 φ

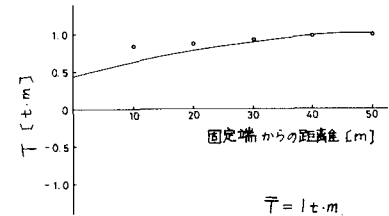


図7. ねじり荷重 T 載荷時のねじりモーメント T

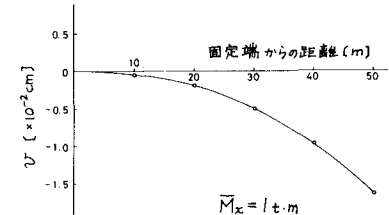


図8. 面外曲げモーメント荷重 $\bar{M}_x$ 載荷時の v

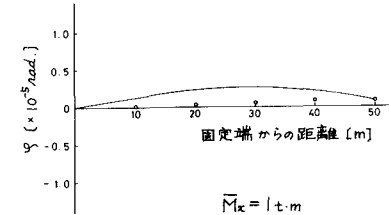


図9. 面外曲げモーメント荷重 $\bar{M}_x$ 載荷時の φ