

東海大学工学部 正員 宇都一馬 正員 冬木 衛 ○学生員 桜井 学

1. まえがき

土質基礎工学で取扱う現象には、似たような現象がいくつかある。筆者らは、これらの現象の統計的な解析を行なうことを目的としており、その前段階としてこれらの現象の定量的な記述が必要となった。そこで、この試みの一部として、①杭の鉛直および水平載荷試験から得られる荷重-変位曲線⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、②平板載荷試験から得られる荷重-変位曲線⁽⁴⁾、③標準貫入試験から得られる打撃回数-累計貫入量曲線⁽⁵⁾、④構造物や盛土などの沈下量-時間曲線⁽⁶⁾と定量的に表現するための数学モデルを設定し、これに実測値を最小2乗法によってあてはめて決定した回帰係数をもとに、これらの曲線を評価する手法を提案し報告した。これによると、この手法で決定される回帰係数によって、主観の入らない曲線の評価が可能となり、また良好な結果が得られている。これらの数学モデルは非線形であるため、回帰係数の決定に際して式の展開に若干の工夫を要することになるが、プログラム電卓によって多少の繰返し計算をすることにより、簡単に求めることができる。

今回の報告は、上記①、②、③の曲線の数学モデルにおける非線形回帰計算方法について、その概要を述べたものである。

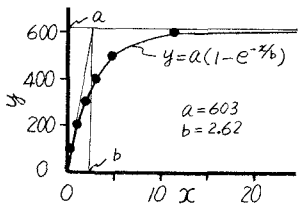


図-1 指数分布型数学モデル (表-1のデータ参照)

2. プログラム作成のための式の展開

①、②、③の曲線の数学モデルは(1)式で示される。

(1)式は、統計学で扱う確率分布曲線の1つである指数分布曲線に対応する。(図-1参照)

$$y = a(1 - e^{-bx}) \quad (1)$$

ここに、 a 、 b は正の係数である。

(1)式を回帰モデルを(2)式のように置く。

$$y = a(1 - e^{-bx}) + \varepsilon \quad (2)$$

ここに、 ε は誤差項である。(2)式に n 組の測定値をあてはめて整理すると、残差平方和 S は次式となる。

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - a(1 - e^{-bx})]^2 \quad (3)$$

(3)式の S が最小になるように、非線形最小2乗法で a 、 b を決定するわけである。そこで、 S を a および b で微分して、これを0に等しいと置き、整理するとそれぞれ、(4)式、(5)式となる。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n [y_i - a(1 - e^{-bx})](1 - e^{-bx}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [y_i - a(1 - e^{-bx})]x_i e^{-bx} = 0 \quad (5)$$

(4)式、(5)式の a をそれぞれ a_1 、 a_2 とすれば、

(6)式、(7)式を得る。

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (1 - e^{-bx})}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-bx})^2} \quad (6)$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i e^{-bx}}{\sum_{i=1}^n x_i e^{-bx} (1 - e^{-bx})} \quad (7)$$

b を決定するには、 $f(b) = a_1 - a_2 = 0$ と置いた(8)式を解けばよい。(8)式の解法については3.で述べる。

$$f(b) = a_1 - a_2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n y_i (1 - e^{-bx})}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-bx})^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i e^{-bx}}{\sum_{i=1}^n x_i e^{-bx} (1 - e^{-bx})} = 0 \quad (8)$$

3. (8)式の解法について

3.1 一樣探索法による解法 この方法は、始めにデータ(x_i , y_i)を入力し、次に b の初期値 b_0 、きざみ Δb 、収束条件 EPS を入力して、 b_0 から Δb 間隔の b_i で(8)式の $f(b)$ を計算し、この $f(b)$ の符号の変化によって順次 Δb のきざみを小さくしながら、相対精度 $\Delta b/b \leq EPS$ となるまで繰返して b を決定する方法である。この計算手順の基本的な考え方を簡単なフローチャートで示したものが図-2である。この方法は3.2で述べる方法に比べ演算時間が多少長くなるが、最も確実な方法と考える。また、フローチャートのループ部分を工夫すれば効率よく b が決定できる。

3.2 Newton-Raphson法による解法 (8)式を b で微分し整理すると(9)式となる。

$$f(b) = -\frac{1}{b^2} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i e^{-x_i/b} \sum_{i=1}^n (1-e^{-x_i/b})^2 - \sum_{i=1}^n y_i (1-e^{-x_i/b}) \sum_{i=1}^n x_i e^{-x_i/b} (1-e^{-x_i/b})}{\left\{ \sum_{i=1}^n (1-e^{-x_i/b})^2 \right\}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i e^{-x_i/b} \sum_{i=1}^n x_i e^{-x_i/b} (1-e^{-x_i/b}) - \sum_{i=1}^n x_i y_i e^{-x_i/b} \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{-x_i/b} (1-e^{-x_i/b})}{\left\{ \sum_{i=1}^n x_i e^{-x_i/b} (1-e^{-x_i/b}) \right\}^2} \right\} \quad (9)$$

(8) 式, (9) 式を用いて Newton-Raphson 法の反復関数 (10) 式を得る。

$$b_{i+1} = b_i - f(b_i) / f'(b_i) \quad (10)$$

すなわち、データ (x_i, y_i) を入力し、次に b_0 , $EPSb$ を入力して、(10) 式で $|b_{i+1} - b_i| / |b_i| \leq EPSb$ となるまで繰返し計算を行えば b が決定できる。この手順をフローチャートで示したものが図-3 である。この方法によれば、3.1 の方法の演算時間の $1/3 \sim 1/5$ あるいはそれ以下の時間で収束するが、 b の初期値 b_0 のとり方によって収束しない場合があるため注意を要する。

3.3 計算例 表-1 に示したデータ (文献2) の解析例を用いて、3.1, 3.2 の方法による結果を示す。

3.1 の方法では、 b の初期値 $b_0 = 0.1$, すぎみ $\Delta b = 100$, 収束条件 $EPSb = 1 \times 10^{-6}$ として計算を行なった結果、 $b = 2.6203350$ となった。 b が決定すれば (6) 式あるいは (7) 式から a が求まり、次に (3) 式から S が求まる。また、実測値のあてはめ具合の良否の判定は (11) 式で表わされる変動値 VV を定義し、この値の大小で評価している。

$$VV = \sqrt{S / (n-2)} / a \quad (11) \quad (n; \text{測点数}, n-2; \text{自由度})$$

今回の例では、 $a = 603.26724$, $S = 4.3687070 \times 10^3$, $VV = 54.781854 \times 10^{-3}$ となっている。

3.2 の方法では、 $b_0 = 1$, $EPSb = 1 \times 10^{-6}$ として計算を行なった結果、 $b = 2.6203344$, $a = 603.26719$, $S = 4.3687070 \times 10^3$, $VV = 54.781858 \times 10^{-3}$ である。

また、この回帰結果を実線で、実測値を黒丸で図-1 に示してある。

ここで、 b_0 , Δb , $EPSb$ の値であるが、 b_0 は対象とするデータの絶対値によつて効率のよい値を適当に選べばよい。3.2 の場合は x の最大値の $1/3$ 程度、あるいはそれ以下の値を入力すればよいと考える。 Δb は大きめの値を入力し、 $EPSb$ は実用的には 1×10^{-3} 程度で十分であると思われる。

4. まとめ

8) Vander Veen は (1) 式の a のみを図解法で解いているが、この図解法は a の初期値設定、 x , y 軸のとり方などに問題があるといわれている。筆者らは、以上述べた方法で非線形回帰計算を行ない決定した回帰係数をもとに、各種の曲線の問題を評価しており、良好な結果を得ている。紙面の都合で省略したが、(1) 式の一般化した数学モデル、 $y = a \{1 - e^{-(x/b)^m}\}$ ($m > 0$)、④の曲線の数学モデル、 $y = a e^{-(x/b)^m}$ ($m < 0$) も今回の式の展開を応用し、プログラムを若干改良すれば回帰係数が決定できる。本文のプログラム、計算例については卒研生 山田淳君 (現早大大学院) の絶大な協力を得ました、ここに感謝の意を表します。

- 参考文献 1) 宇都・冬木・近藤・桜井; 74 の載荷試験結果の一整理方法, 第13回土質工学研究発表会, (1978).
2) 堀井・宇都・冬木・近藤・桜井; 杭の荷重-変位曲線の非線形回帰結果による支持力の一評価法, 第23回土質工学シンポジウム, (1978).
3) 堀井・光家・宇都・冬木・桜井; 杭の水平載荷試験での降伏点の評価法, 杭の水平載荷試験に関するシンポジウム, 土質学会, (1979).
4) 桑田・宇都・冬木・桜井; ニューマチッククレーン内における平板載荷試験, 平板載荷試験に関するシンポジウム, 土質学会, (1979).
5) 宇都・冬木・近藤・石塚; 標準貫入試験に関する基礎的研究(3), 第13回土質工学研究発表会, (1978).
6) 石原・小野・有木・宇都・冬木・桜井; アプローチ方式橋台の長期沈下予測, 第24回土質工学シンポジウム, (1979).
7) N.R. Draper・H. Smith (中村慶一訳); 応用回帰分析, 森北出版KK, (1973).
8) C. Vander Veen; The Bearing Capacity of a pile, Proc. 3rd. ICSMFE, (1953).

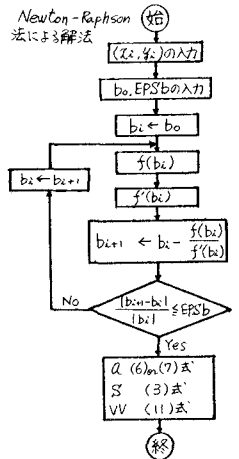
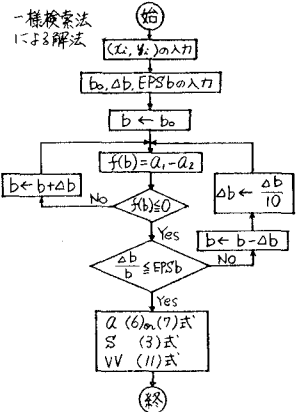


表-1 使用データ

測点 数	y	x
1	100	0.16
2	200	1.00
3	300	1.90
4	400	2.90
5	500	4.70
6	600	11.50