II－16　粒子沈降速度におけるBASSET-TERMの影響について

中央大学理工学部　正会員　林　泰造
中央大学　大学院　学生員　○大橋　正和

1. はじめに

従来より，粒子の沈降速度に関する研究は，数多く行なわれてきたが，その多くが抵抗係数にStokesの抵抗則を用いている。その結果，それらの研究の適用範囲はReynolds数が1以下の場合に限られ，移動床，混相流等の研究において沈降速度を正確に算定することは困難である。本研究では，基礎式にBasset方程式を用い，その抵抗係数を高Reynolds数まで適用される式を採用し，基礎方程式の拡張を行ない，その解析方法を示し，さらに，Basset項の沈降速度への影響について検討を加え，その性質を明らかにした。

2. 沈降する粒子の運動方程式

静水中を沈降する球形粒子の運動方程式は，次式で表わされる。

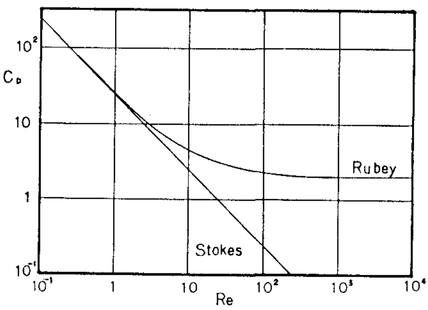
$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho_s\frac{dw}{dt}=\frac{4}{3}\pi a^3(\rho_s-\rho)g-\frac{1}{2}\rho w^2 C_D\pi a^2-\frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{dw}{dt}$$
$$-6(\pi\rho\mu)^{1/2}a^2\int_0^t\frac{dw}{dt}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\quad\cdots(1)$$

ここに，w：沈降速度，ρ：水の密度，ρ_s：粒子の密度，C_D：抵抗係数，μ：水の粘性係数，ν：水の動粘性係数，$2a$：粒子径

(1)式において，右辺第1項は，重力項，第2項は，流体抵抗による項，第3項は，仮想質量による項，第4項は，Basset力による項である。本研究では，抵抗係数を次式の様に表わす。

$$C_D=\frac{24}{Re}+C_{D\infty}\quad\cdots(2)$$

ここに，$Re=\frac{2aw}{\nu}$



図－1　抵抗係数

(2)式においてRubey(1933)は，$C_{D\infty}$を次の様に表わした。(図－1)

$$C_{D\infty}=2.0\quad\cdots(3)$$

(2)，(3)式を(1)式に代入し，整理すると，

$$\frac{dw}{dt}=-Aw^2-Bw+C-D\int_0^t\frac{w'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\quad\cdots(4)$$

ここに，$A=\frac{3}{2a(2S+1)}$，$B=\frac{9\nu}{a^2(2S+1)}$，$C=\frac{2(S-1)g}{2S+1}$，

$D=\frac{9\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi\rho}\,a(2S+1)}$，$S=\frac{\rho_s}{\rho}$，$w'(\tau)=\frac{dw}{d\tau}$

3. 粒子の沈降速度

次に，(4)式を解く準備として Basset力の項を消去した場合の解を求めておく。(4)式より

$$\frac{dw_{(5)}}{dt}=-Aw_{(5)}^2-Bw_{(5)}+C \qquad \cdots (5)$$

上式を，$t=0$，$w=0$の初期条件の下に解くと，

$$w_{(5)}(t)=\xi-\frac{\varphi\xi\exp(-\varphi t)}{A\xi\exp(-\varphi t)-(A\xi-\varphi)} \qquad \cdots (6)$$

ここに，$\xi=\dfrac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$，$\varphi=2A\xi+B$

(6)式において，$t\rightarrow\infty$とすると

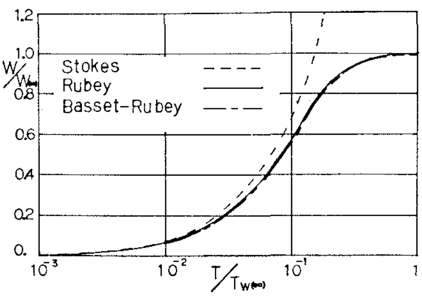
$$w_{(5)}(\infty)=\xi \qquad \cdots (7)$$

(4)式と(5)式の性質より

$$w(t)\leqq w_{(5)}(t) \qquad \cdots (8)$$

そこで，(4)式のwを $w_{(5)}(\infty)=\xi$ で無次元化すると，(4)式は，

$$\frac{dW}{dt}=-A\xi W^2-BW+\frac{C}{\xi}-D\int_0^t\frac{W'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \qquad \cdots (9)$$



図－2　沈降速度

(9)式の両辺に$(\sqrt{t-\tau})^{-1}$を掛け，両辺を0からtまで積分し整理すると，

$$\int_0^t\frac{W'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\int_0^t\frac{A\xi W^2+BW-\frac{C}{\xi}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\tau\frac{W'(\tau_1)}{\sqrt{t-\tau_1}}d\tau_1=0 \qquad \cdots (10)$$

左辺第3項にAbelのVolterra型積分方程式を用いて書き換え，変数変換をし演算を行なうと，

$$\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\tau\frac{W'(\tau_1)}{\sqrt{t-\tau_1}}d\tau_1=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=2\int_0^{\sqrt{t}}\varphi(t-\lambda^2)d\lambda$$

$$=4\int_0^{\sqrt{t}}d\lambda\int_0^{\sqrt{t-\lambda^2}}W'(\tau-\lambda^2-\varsigma^2)d\varsigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}dr\int_0^{\sqrt{t}}W'(\tau-r_1^2)r_1dr_1=\pi[W(t)-W(0)] \quad \cdot (11)$$

(11)式と(9)式を(10)式に代入し，両辺を微分し演算を行ない整理すると，次式の2階常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2W}{dt^2}+(2B-\pi D^2+2A\xi W)\frac{dW}{dt}+(2AD\xi+AB\xi)W^2+B^2W=\frac{BC}{\xi}-\frac{CD}{\xi\sqrt{t}} \qquad \cdots (12)$$

上式を数値解析した解と(6)式を無次元化して求めた解との比較を図－2に示す。

4. 結論

図－2に見られる様に粒子の沈降速度に与えるBasset項の影響は，一1％程度であり，外力が働かない場合無視できることが解った。特にStokes則を用いた場合の最終沈降速度は，$w(\infty)=C/B$ であり，図－2より沈降初期を除いて適用範囲から大きく外れていることは明らかである。また，外力が働く場合，特に乱流中の挙動については，現在解析中であり，次の機会に発表したいと考えている。

参考文献

Villat, H.: "Leçons sur les fluides visqueux," Gauthier-Villars, Paris, (1943)