I－26　活荷重合成げたの最適けた高と最適解との関係について

群馬高専　正員　平田恭久
東京都立大学　正員　伊藤文人

1. まえがき

プレートガーダー等の桁橋においては従来から最適けた高の考え方が用いられてきている。現在では最適設計での最適解の探索方法としてはSUMT，反復線形計画法等の非線形最適化手法が用いられているが，最適けた高の考え方は桁橋の最小重量設計での最適解の探索方法としてなお意義のある方法であると考えられる。しかしながら最適けた高流の最適解の探索では，①けた高で1次元探索するため他の設計変数を等号条件の代入または連立により消去しているが，この等号条件にどの制約条件を採用するか。②制約条件を採用して最適けた高を探索するアルゴリズム。③最適けた高の探索により得られた解（設計変数ベクトル）が真の大域的な最適解になっているか。等の問題点がある。これらの問題点のうち①について筆者らは活荷重合成げたの主げた断面の決定を例にして考察を加えてきたが，今回は③を中心にして最適けた高と最適解との関係について考えてみた。

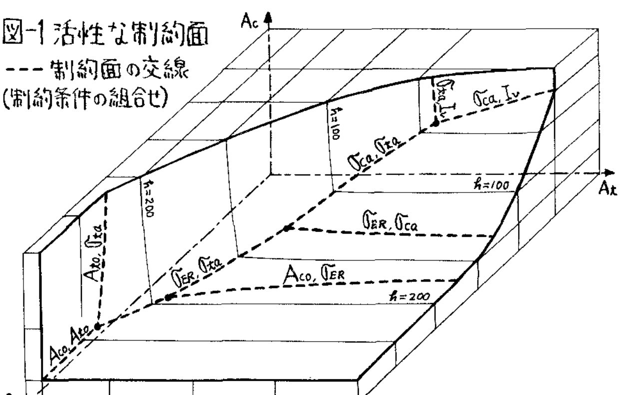
2. 最適化問題及び最適けた高の求め方

1）活荷重合成げたにおいて床版を与件とした鋼げた断面決定での最適化問題を考える。目的関数は鋼げた断面積A_s（断面変化点を考慮した平均曲げモーメントを用いると近似的には鋼げた体積を目的関数にしたのと同じ）。制約条件は，$A_c \geqq A_{co}$（圧縮フランジの最小断面積），$\sigma_{sc}+\sigma_{vc} \leqq \sigma_{ca}$（圧縮フランジの合成応力度），$\sigma_{sc} \leqq \sigma_{ER}$（架設時許容応力度），$A_t \geqq A_{to}$（引張フランジの最断面積），$\sigma_{st}+\sigma_{vt} \leqq \sigma_{ta}$（引張フランジの合成応力度），$\sigma_{vc} \geqq 0$（合成断面の中立軸が鋼げた内），$\mu \cdot M_v \leqq I_v$（たわみ制限に抵触しないための断面二次モーメント）の7個の制約条件を取り上げている。設計変数はけた高h，腹板厚t，圧縮フランジ断面積A_c，引張フランジ断面積A_tの4個であるが，腹板厚tは最小板厚$t=t_0$または最大幅厚比$t=h/r$より定まるものとすると実質的には3個となる。

2）最適けた高はけた高hを変数とし鋼げた断面積A_sの最小点を見つける1次元探索である。プレートガーダーでは微分法による最適けた高の算出式が導かれているが，活荷重合成げたでは試算により探索するのが最も便利である。A_sをhの従属変数として表わすには$A_s=A_c+A_t+t \cdot h$よりA_c，A_tをhの従属変数として表わしておかねばならない。曲げモーメントM_s，M_vを与えてA_c，A_tを定めるには2個の等号条件が必要である。この2個の制約条件としてどの制約条件を用いるかが“制約条件の組合せ”である。上記の方法で最適解を探索していることは最適けた高では『最適解は2個の制約面の交線上にあり，この線上を探索したときのA_s最小点は大域的な最適解となっている』ことを前提としている。

3. 活性な制約面及びその交線

図-1 活性な制約面
--- 制約面の交線
(制約条件の組合せ)



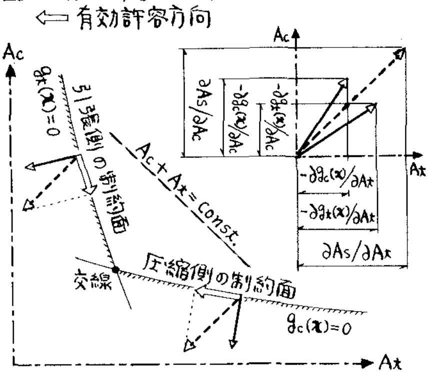
2.で述べたように最適けた高では最適解を制約面の交線上で探索しているので，取り上げている制約条件のすべてを満足している制約面（許容領域に直接面した制約面で“活性な制約面”と言う）がどのようになっているかが問題となる。h，A_c，A_tの3次元で表わした活性な制約面の例（$M_s+M_v=400^{tm}$）を図-1に示す。図-1で横になっている制約面が主としてA_cを規定しており（この制約条件を“圧縮側の制約条件”と称し，$A_c \geqq A_{co}$，$\sigma_{sc}+\sigma_{vc} \leqq \sigma_{ca}$，$\sigma_{sc} \leqq \sigma_{ER}$の3個），縦になっている制約面が主として$A_t$を規定している（この制約条件を“引

張側の制約条件"と称し，$A_t \geqq A_{t0}$, $\sigma_{st}+\sigma_{ut} \leqq \sigma_{ta}$, $\sigma_{uc} \geqq 0$, $\mu \cdot M_u \leqq I_u$の4個)。圧縮側の制約面と引張側の制約面との交線はh＝一定のときのA_s最小点になっていると考えられるが，この交線は圧縮側の条件1個と引張側の条件1個とを組合せたものでありこれを"通常の組合せ"と称した。これに対し圧縮側または引張側の条件のみによる交線では通常の組合せよりもh＝一定でのA_sが大きくなっているので，圧縮側または引張側の条件のみによる組合せを"不利な組合せ"と称した。最適けた高はA_s最小点を探索しているので，通常の組合せのみを考えればよい。

4. 最適けた高は大域的な最適解となっているか

1) 最適けた高は3.で示したように圧縮側の制約面と引張側の制約面の交線上(通常の組合せ)をhを変化させて最小点を探索しているので，この交線上でのA_sがh＝一定の条件で最小となっていれば，『h＝一定のときの最小点の中からhを変化させて最小点を見つける』ので，最適けた高は大域的な最適解になっているはずである。図－1についてh＝一定の断面を作ると図－2に示すようになっている。図－2において交線がA_s最小点になっているための条件は，『単独の制約面上では有効許容方向(微少移動が制約条件を侵害せずかつ目的関数がその方向の移動で改善される)が存在し，交線では存在しないこと』が活性な制約面の範囲で常に成立していることである。この条件を式で表わすと(1)式となる。通常の組合せは圧縮側の条件1個と引張側の条件1個とを組合せているので，圧縮側の条件については(1)式上段が，引張側の条件については(1)式下段が成立することを確かめればよい。

図－2 h＝一定での制約面と勾配ベクトル
⇐ 有効許容方向



$$\frac{\partial A_s(x)/\partial A_t}{\partial A_s(x)/\partial A_c} > \frac{-\partial g_c(x)/\partial A_t}{-\partial g_c(x)/\partial A_c} \text{ および } \frac{\partial A_s(x)/\partial A_c}{\partial A_s(x)/\partial A_t} > \frac{-\partial g_t(x)/\partial A_c}{-\partial g_t(x)/\partial A_t}$$

$\dfrac{\partial A_s(x)/\partial A_t}{\partial A_s(x)/\partial A_c}=1$，$\dfrac{\partial A_s(x)/\partial A_c}{\partial A_s(x)/\partial A_t}=1$なので上式は

$$\left.\begin{array}{l}\partial g_c(x)/\partial A_t > \partial g_c(x)/\partial A_c \\ \partial g_t(x)/\partial A_c > \partial g_t(x)/\partial A_t\end{array}\right\} \cdots\cdots(1)$$

2) 各制約条件式について(1)式が成立することを確かめる。①$g_c(x)=A_{c0}-A_c \leqq 0$より$\partial g_c(x)/\partial A_c=-1<\partial g_c(x)/\partial A_t=0$。②$g_t(x)=A_{t0}-A_t \leqq 0$より$\partial g_t(x)/\partial A_c=0>\partial g_t(x)/\partial A_t=-1$。③$g_t(x)=0-\sigma_{uc} \leqq 0$より$\partial g_t/\partial A_c=0>\partial g_t(x)/\partial A_t=-M_u \cdot h/(I_u \cdot A_u)$。④$g_t(x)=\mu \cdot M_u - I_u \leqq 0$より$\partial g_t(x)/\partial A_c=-(h^2/4-\delta_u^2-2\delta_u \cdot y_{uc})>\partial g_t(x)/\partial A_t=-(h^2/4-\delta_u^2+2\delta_u \cdot y_{ut})$。⑤$g_c(x)=\sigma_{sc}-\sigma_{ER} \leqq 0$より$\partial \sigma_{sc}/\partial A_t-\partial \sigma_{sc}/\partial A_c=h \cdot M_s \cdot (I_s-2\delta_s \cdot y_{sc} \cdot A_s)/(I_s^2 \cdot A_s)>0$，$-\partial \sigma_{ER}/\partial A_t=0>-\partial \sigma_{ER}/\partial A_c=-\frac{5}{8}E \cdot f\ell \cdot \{t \cdot h/(2A_c\sqrt{3+t \cdot h/2A_c})+\sqrt{3+t \cdot h/2A_c}\}/(\sqrt{r_c} \cdot A_c \cdot \sqrt{A_c})$または$-\frac{5}{8}E \cdot f\ell \cdot 2/(\sqrt{r_c} \cdot A_c \cdot \sqrt{A_c})$，よって$\partial g_c(x)/\partial A_t>\partial g_c(x)/\partial A_c$。以上のように①～⑤の制約条件については比較的簡単に(1)式の成立が確かめられる。次に下記の制約条件では，

⑥$g_t(x)=\sigma_{st}+\sigma_{ut}-\sigma_{ta} \leqq 0$より$\partial g_t(x)/\partial A_c-\partial g_t(x)/\partial A_t$

$$=\frac{M_s \cdot h}{I_s^2 \cdot A_s}\underbrace{(I_s+2\delta_s \cdot y_{st} \cdot A_s)}_{\boxed{1}}+\frac{M_u \cdot h}{I_u^2 \cdot A_u}\underbrace{(I_u+2\delta_u \cdot y_{ut} \cdot A_u)}_{\boxed{2}}$$

$\boxed{2}>0$なので，$\boxed{1}$の正負を調べる。$\boxed{1}>0$となるための条件を導くと$\dfrac{A_t}{A_c}<6\dfrac{A_c}{t \cdot h}+5+\dfrac{1}{2}\dfrac{t \cdot h}{A_c}$ ……(2)

(2)式右辺の最小値＝$2\sqrt{3}+5$で計算例についてA_t/A_cを求めると($\sigma_{st}+\sigma_{ut} \leqq \sigma_{ta}$が適合する制約条件である$M_s+M_u$，$h$の範囲で)最大値＝2.6程度となり(2)式を満足している。よって$\partial g_t(x)/\partial A_c>\partial g_t(x)/\partial A_t$。

⑦$g_c(x)=\sigma_{sc}+\sigma_{uc}-\sigma_{ca} \leqq 0$より$\partial g_c(x)/\partial A_t-\partial g_c(x)/\partial A_c$

$$=\frac{M_s \cdot h}{I_s^2 \cdot A_s}\underbrace{(I_s-2\delta_s \cdot y_{sc} \cdot A_s)}_{\boxed{1}}+\frac{M_u \cdot h}{I_u^2 \cdot A_u}\underbrace{(I_u-2\delta_u \cdot y_{uc} \cdot A_u)}_{\boxed{2}}$$

$\boxed{1}>0$は明らかである。計算例より$\dfrac{M_s \cdot h}{I_s^2 \cdot A_s}\boxed{1}\Big/\dfrac{M_u \cdot h}{I_u^2 \cdot A_u}\boxed{2}$を求めると($\sigma_{sc}+\sigma_{uc} \leqq \sigma_{ca}$が適合する制約条件である$M_s+M_u$，$h$の範囲で)8～54程度となり$\boxed{2}$の正負は殆ど問題にならない(計算結果は$\boxed{2}>0$であった)。よって$\partial g_c(x)/\partial A_t>\partial g_c(x)/\partial A_c$。以上のように⑥，⑦が活性な制約面となっている範囲では(1)式は成立していると考えられる。

5. まとめ

最適けた高流の最適解の探索では最適解は活性な制約面の交線上にあるものとして探索を行っているが，この方法によって得られた最適けた高が大域的な最適解であることが活荷重合成げたの例で確かめられた。今後の課題として1.の問題点②最適けた高流の最適解の探索でのアルゴリズムを工夫していきたいと考えている。