I－18　　確率過程のフーリエ振幅とフーリエ位相角の特性に関する考察

武蔵工業大学　正会員　○星谷 勝

1．まえがき　地震動波形などをモデル化する際に確率過程理論を適用することが多い。地震動波形 $x(t)$ を定常過程として取扱うときには波形特性はパワースペクトル $S_x(\omega)$ によって記述される．また非定常過程とすれば，たとえば物理スペクトル $S_x(\omega,t:W)$ などが重要な役割をする。ところで，パワースペクトルは $x(t)$ をフーリエ変換しその絶対値であるフーリエ振幅 $A(\omega)$ を用いると $S_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}E[A^2(\omega)]$ で与えられる。非定常過程の物理スペクトルは重み関数 $W(t)$ を用いて時刻 t 周辺でとりだした $x(t)$ に対してフーリエ変換を行い，その絶対値である $A(\omega,t:W)$ を用いて $S_x(\omega,t:W)=\frac{1}{2\pi}E[A^2(\omega,t:W)]$ で与えられる．したがって定常，非定常のいずれの場合においてもフーリエ振幅に結びつけた波形特性の解析といえる。フーリエ変換からはフーリエ振幅だけでなくフーリエ位相角 $\theta(\omega)$ も得られるが，多くの研究では $\theta(\omega)$ は単にある基準からのずれであるとして工学的には十分な検討のなされないままに地震動波形の確率モデル化とシミュレーション法が開発されてきたと言えよう。シミュレーションにおいても定常，非定常を問わず位相角は0から 2π の一様乱数として与えている。しかし，フーリエ逆変換を行えば定常，非定常に関係なく原波形が再現できるのであるから，フーリエ振幅と同じ重みでフーリエ位相角が重要な意味を持っていると考えるのが当然と思われる。大崎ら[1]はフーリエ位相角の役割を検討するために多くの実地震動記録のフーリエ解析を行い位相特性に関する興味ある幾つかの定性的な観察結果を得たが理論的には十分な解明を今後の問題としている。そこで本研究は確率過程 $x(t)$ のフーリエ振幅 $A(\omega)$ とフーリエ位相角 $\theta(\omega)$ を理論的に検討して，それぞれの特性がどのようになっているのかを明らかにしようと試みたものである。たとえば位相角は $x(t)$ が定常のときに何ぜ一様乱数としているのか。また非定常のときには一様乱数となるのであろうか等を明らかにしたいと考えたわけである。同時にシミュレーション法における数学モデルとフーリエ変換における $A(\omega)$ と $\theta(\omega)$ との関連性を考察した。なお工学上にあらわれる多くの現象がガウス型分布にしたがうことから $x(t)$ を平均値0のガウス型確率過程として検討した。

2．$x(t)$ のフーリエ変換　理論的な考察を行なう上で必要となるフーリエ変換等の関連式をまとめておく。

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt \quad ; \begin{matrix}-\infty<t<\infty\\-\infty<\omega<\infty\end{matrix} \tag{1}$$

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t\,dt \tag{2}$$

$$I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t\,dt \tag{3}$$

(2),(3)式を用いれば，(1)式は

$$X(\omega)=R(\omega)-iI(\omega)=A(\omega)e^{-i\theta(\omega)} \tag{4}$$

ここでフーリエ振幅とフーリエ位相角はそれぞれ次式で与えられる。

$$A(\omega)=\{R^2(\omega)+I^2(\omega)\}^{1/2} \tag{5}$$

$$\theta(\omega)=\tan^{-1}B(\omega)=\tan^{-1}\{I(\omega)/R(\omega)\} \tag{6}$$

(1)式を逆変換すれば

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{7}$$

(4)式を上式に代入して整理すれば

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\{\omega t-\theta(\omega)\}d\omega \tag{8}$$

$$E[R(\omega_1)R(\omega_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E[x(t_1)x(t_2)]\cos\omega_1t_1\cos\omega_2t_2\,dt_1dt_2 \tag{9}$$

$$E[I(\omega_1)I(\omega_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E[x(t_1)x(t_2)]\sin\omega_1t_1\sin\omega_2t_2\,dt_1dt_2 \tag{10}$$

$$E[R(\omega_1)I(\omega_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E[x(t_1)x(t_2)]\cos\omega_1t_1\sin\omega_2t_2\,dt_1dt_2 \tag{11}$$

3. $x(t)$が平均値0の非定常確率ガウス過程の場合 (9)~(11)式は$R(\omega)$, $I(\omega)$に関する自己相関, 相互相関関数であるが, 右辺の被積分項に現われる$x(t)$の自己相関関数$E[x(t_1)x(t_2)]$は$x(t)$が非定常確率過程であるからt_1とt_2の関数である。これらの積分は$E[x(t_1)x(t_2)]$が具体的な関数形で与えられないかぎり, 理論式として実行は不可能であるが一般には(9)~(11)式はω_1とω_2の関数となる。したがって$R(\omega)$と$I(\omega)$は非定常確率ガウス過程であり, (11)式が0とならないかぎりそれらは互に相関している。このとき, (5),(6)式よりフーリエ振幅$A(\omega)$とフーリエ位相角$\theta(\omega)$もまた非定常確率過程となることは明らかである。今, (9)~(11)式の積分が実行できたとして$\omega_1=\omega_2=\omega$とおき, ωに於ける$R(\omega)$と$I(\omega)$の分散及び共分散をそれぞれ$\sigma_R^2(\omega)$, $\sigma_I^2(\omega)$, $\sigma_R\sigma_I\gamma_{RI}(\omega)$とおけば, $R(\omega)$と$I(\omega)$が平均値0のガウス分布にしたがうことからωに於ける両者の同時確率密度関数は変数ωを省略して次式で与えられる。

$$f_{RI}(R,I) = \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\gamma_{RI}^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\gamma_{RI}^2)}\left\{\frac{R^2}{\sigma_R^2} - \frac{2\gamma_{RI}RI}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{I^2}{\sigma_I^2}\right\}} \qquad (12)$$

このとき(5),(6)式の関係を用いれば$A(\omega)$と$B(\omega)$の同時確率密度関数は ωを省略して

$$f_{AB}(A,B) = \frac{1}{\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\gamma_{RI}^2}}\cdot\frac{A}{1+B^2}\, e^{-\frac{1}{2(1-\gamma_{RI}^2)}\cdot\frac{A^2}{1+B^2}\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{2\gamma_{RI}}{\sigma_R\sigma_I}B + \frac{1}{\sigma_I^2}B^2\right)} \qquad (13)$$

これより上式がAとBの関数の積に分離されないかぎりAとBは互に相関していることがわかる。このことは(6)式より$\theta(\omega)=\tan^{-1}B(\omega)$であるから$\omega$に於いて$A(\omega)$と$\theta(\omega)$は互に相関していることになる。フーリエ振幅$A(\omega)$とフーリエ位相角$\theta(\omega)$の確率密度関数は(13)式の周辺確率密度を求めることにより次のように算定される。

$$f_A(A) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{AB}(A,B)\,dB \qquad (14) \qquad f_\theta(\theta) = \int_0^\infty f_{AB}(A,B)\,dA \bigg/ \left|\frac{d\theta}{dB}\right| = \frac{1-\gamma_{RI}^2\ \frac{\sigma_R\sigma_I}{\pi}}{\sigma_I^2\cos^2\theta + \sigma_R^2\sin\theta - \gamma_{RI}\sigma_R\sigma_I\sin 2\theta} \qquad (15)$$

(15)式は$\sigma_R=\sigma_I=\sigma$のときには $f_\theta(\theta) = \frac{\sqrt{1-\gamma_{RI}^2}}{\pi}\cdot\frac{1}{1-\gamma_{RI}\sin 2\theta}$ (16) となる。主値$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$をフーリエ位相角$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$の範囲に拡張して示せば図1となる。この図からも明白であるが, 非定常$x(t)$の場合には一様分布とはならない。もし$\gamma_{RI}\cong 1$(正の完全相関に近い)のときは図2となる。$\gamma_{RI}=0$のときには一様分布となるが, これは次節で検討する。

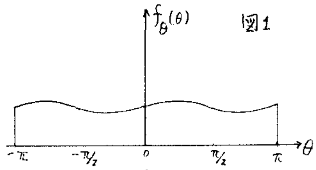

図1

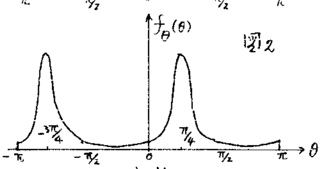

図2

4. $x(t)$が平均値0の定常確率ガウス過程の場合 $x(t)$が定常過程のときには自己相関関数を$E[x(t_1)x(t_2)]=R_x(t_1-t_2)$とおけるから(9)式は積分され, パワースペクトル$S_x(\omega)$と$R_x(\tau)$の関係を用いて整理すれば次のようになる。

$$E[R(\omega_1)R(\omega_2)] = 0 \ ;\ \omega_1 \neq \omega_2$$
$$= 2\pi T S_x(\omega)\left\{1 + \frac{\sin 2\omega T}{2\omega T}\right\} \ ;\ \omega_1=\omega_2=\omega \qquad (16)$$

以上より$R(\omega)$は平均値0の確率過程であり, 自己相関関数が0(ホワイトノイズ型), 且つ分散が$\sigma_R^2\cong 2\pi T S_x(\omega)$の非定常ガウス型過程となる。$I(\omega)$も$R(\omega)$と同一の非定常ガウス型ホワイトノイズとなる。(11)式は積分すると0となり$R(\omega)$と$I(\omega)$は互に独立の確率過程であることがわかる。さて, $\gamma_{RI}=0$, $\sigma_R=\sigma_I=\sigma$(同一)とおけば(12)式は $f_{AB}(A,B) = \frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\pi(1+B^2)}$ (17) となる。これは変数分離形でありAとBが互に独立であることを示している。したがってAと$\theta=\tan^{-1}B$も互に独立となる。(14),(15)式はそれぞれ次のようになる。 $f_A(A) = \frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}$ (18) $f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$; $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ (19)

以上より$x(t)$が定常のときには$A(\omega)$は非定常レーレイ型ホワイトノイズであり, $\theta(\omega)$は定常一様分布型ホワイトノイズとなる。なお, $A(\omega)$と$\theta(\omega)$は互に独立である。以上の結果と(7)式の離散型表示式を用いれば, 定常$x(t)$のシミュレーションは $x(t)=\sum_{k=1}^{N} a_k\cos(\omega_k t-\theta_k)$; $a_k=\frac{\Delta\omega}{\pi}A(\omega_k)$, $\theta_k=\theta(\omega_k)$ で可能となることが納得できる。非定常$x(t)$のときには(9)~(15)式の解析が困難であり, シミュレーション法ではa_kの代りに$a(\omega_k,t)$と置きかえることにより非定常性を表現し, 位相角θ_kは一様乱数としているのが現状である。

参考(1)大橋他：地震波の位相特性とその応用に関する研究, その1~その4, 建築学会学術講演, 昭53年9月