

東京都立大学 野上 邦栄
東京都立大学 伊藤 丈人

1. まえがき: 本報告は、吊橋主塔のラーメン柱の有効座屈長について厳密解、及び近似解と有限剛体要素モデル（ジャンネモデルの拡張モデル）の固有値（座屈荷重）からの換算有効座屈長を比較し、さらに水平材の剛性をパラメータにし、初期曲りを含む幾何学的非線形及び残留応力を持つ材料非線形を考慮したラーメン柱の耐力問題を解析している。

2. 解析モデル及び解析仮定: 解析モデルは、要素間を曲げひずみと軸ひずみの両方を従属的に考慮できるように上下フランジ断面に取り付けられた2本の伸縮バネを結合し、この2本のバネに弾性体として力学的特性を与えたもので、従って要素自身は剛体要素と見なすのである。さらにこの解析モデルにおいて重要なバネ常数は、連続体としての要素のひずみエネルギーとバネのひずみエネルギーが等価になるように決定し、要素が等分割であれば

$$K_i^{(1)} = K_i^{(2)} = k = (m-1)EA/2L, \quad h = r \quad (1)$$

なる式を得る。ここに $(m-1)$ はバネの節点数、 L は柱の全長、 A は断面積、 r は断面二次半径、 h は断面中心から両側取り付け位置までの距離である (Fig. 1)。

解析仮定は、Fig. 1 解析モデル
1) 両端要素以外等分割要素 2) 両端ヒンジ 3) 柱の断面は箱型対称断面（複軸）4) 腹板（ラーメン柱）

は無視勾配力 - ひずみ曲線は残留応力の有る弾塑性曲線とする (Fig. 3) 5) 水平材を回転バネでモデル化する。

3. 断面諸元: 今回の吊橋主塔の断面諸元は、下記のとおりである

柱	A (m ²)	I (m ⁴)	r (m)	G_p (kg/cm ²)
	0.5144	0.6649	1.14	3600

L ₁ (m)	L ₂	L ₃	L ₁₊₂₊₃	L
18.6	37.3	32.6	88.5	177.

水平材	A	I	ρ	K (x10 ⁶)
上段	0.1792	0.3179	22.58	1.776
中段	0.2485	0.6791	23.6	3.615
下段	0.4366	1.0558	24.94	5.334

$$\begin{bmatrix} \frac{C \cos \alpha}{\sin \alpha} + K_1 & -\frac{C}{\sin \alpha} & 0 \\ -\frac{C}{\sin \alpha} & \frac{C \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{C \cos \alpha}{\sin \alpha} + K_2 & -\frac{C}{\sin \alpha} \\ 0 & -\frac{C}{\sin \alpha} & \frac{C \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{C \cos \alpha}{\sin \alpha} + K_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \text{sym.} \\ 0 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \quad 19 \times 19$$

4. 解析法: ラーメン形式主塔の場合、ラーメン構造内の1本ずつの柱について注目し有効座屈長を考える時、厳密解は上の行列式の固有値解析となる。(Kは柱の断面は一樣) ここで $\lambda^2 = P/EI$, $C = EI\lambda$, $\alpha_1 = \lambda L_1$,

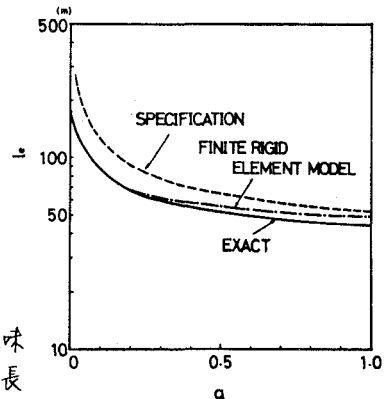
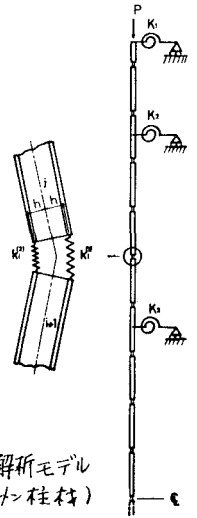
$\alpha_2 = \lambda L_2$, $\alpha_3 = \lambda L_3$ 。又近似計算による有効座屈長を求める式は

$$\frac{\pi^2 G_T G_B / R^2 - 36}{6(G_T + G_B)} = \frac{\pi / R}{\tan(\pi / R)}, \quad l_e = R \cdot L_c \quad (2)$$

ここで $G_T = \frac{\sum I_{CT} / L_{CT}}{\sum I_{BT} / L_{BT}}$, $G_B = \frac{\sum I_{CB} / L_{CB}}{\sum I_{BB} / L_{BB}}$, T, B はラーメン構造内のラーメン柱の上下端部を意味し、 I_C, L_C, I_B, L_B は柱の断面二次モーメント、その骨組長、及びラーメン柱（水平材）の断面二次モーメント、その骨組長を意味する。

R は有効座屈長係数である。有限剛体要素モデルの場合の有効座屈長は柱全体系に対し細長比を含む2次の固有値問題となり、

Fig. 2 水平材剛性の違いによるラーメン柱の有効座屈長



$\det |A-PQ| = 0$ からの最小固有値による換算有効座屈長として与えられ、
 $l_e = \pi \sqrt{EI/E}$ となる。本解析では要素分割を $m=20$ にしたため、その場合の
 行列 A, Q は左のような行列となる。ここで $D = 6 + 2Q^2, B = 1 - Q^2, Q = P/4kh$
 $S = L/2kh^2n, g_1 = K_1/2kh^2, g_2 = K_2/2kh^2, g_3 = K_3/2kh^2, n = m-1$ である。
 実際、厳密式の λ , 近似式の λ , 及び有限剛性要素モデルの P の各々の最小解
 は逐次近似法で求めた。ラーメン柱の耐力解析は、変位増分による
 Newton Raphson 法を用いて行った。解析に当たっての全ポテンシャルエネルギー
 及び釣合方程式は次のようになる。

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{d_i^{(1)}} f(d) d + \int_0^{d_i^{(2)}} f(d) d \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_i \theta_i^2 - P \left[\frac{L}{2n} (\cos \theta_1^0 + \cos \theta_m^0 - \cos \theta_1 - \cos \theta_m) + \right.$$

$$\left. - \frac{L}{n} \sum_{i=2}^n (\cos \theta_i^0 - \cos \theta_i) + \sum_{i=1}^n \delta_i \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) \right] \quad (3)$$

$$f_i^{(1)} + f_i^{(2)} - P \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) = 0 \quad (i=1, n)$$

$$h(f_i^{(1)} + f_i^{(2)}) + K_1 \theta_1 - \frac{PL}{2n} \sin \theta_1 + \frac{P\delta_1}{2} \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = 0$$

$$h(f_{i-1}^{(1)} - f_{i-1}^{(2)} - f_i^{(1)} + f_i^{(2)}) - \frac{PL}{n} \sin \theta_i + \frac{P\delta_{i-1}}{2} \sin \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right) + \frac{P\delta_i}{2} \sin \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) = 0 \quad (i=2, n)$$

$$h(f_{i-1}^{(1)} - f_{i-1}^{(2)} - f_i^{(1)} + f_i^{(2)}) + K_i \theta_i^* - \frac{PL}{n} \sin \theta_i + \frac{P\delta_{i-1}}{2} \sin \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right) + \frac{P\delta_i}{2} \sin \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) = 0$$

$$h(f_{m-1}^{(1)} - f_{m-1}^{(2)}) + K_1 \theta_m - \frac{PL}{2n} \sin \theta_m + \frac{P\delta_{m-1}}{2} \sin \left(\frac{\theta_{m-1} + \theta_m}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

ただし f は非線形バネ力、 δ_i は軸方向変位、 θ_i^0 は初期曲り、 $d_i^{(1)}, d_i^{(2)}$ はバネの伸縮変位量、 θ_i^* は回転バネ位置における θ_i 。釣合方程式の右辺式は回転バネが無い場合に回転バネが有る場合第4式を使うことになる。
 なお境界条件式は次のようになる。

$$\frac{L}{2n} (\sin \theta_1 + \sin \theta_m) + \frac{L}{n} \sum_{i=2}^n \sin \theta_i - \sum_{i=1}^n \delta_i \sin \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) = 0 \quad (5)$$

又 $\sum \frac{L}{2n} (\sin \theta_1 - \sin \theta_i^0) + \sum_{i=2}^n \frac{L}{n} (\sin \theta_i - \sin \theta_i^0) - w^* = 0 \quad (6)$
 の式を用いて変位増分 w^* と与えるようにしている。ところで(4)の第2
 第4, 第5式を加えると(5)の境界条件式を含むので自由度数を考慮して
 (4)の第5式の代わりに(6)式を使った。

5. 解析結果：厳密解, 近似解, 本解析解の有効座屈長をまとめたのが
 Fig. 2 である。近似解は厳密解に比しかなり大きな値であり、本解析モデル
 の換算有効座屈長は水平材の剛性が小さい領域では厳密解に一致し
 ているが、その後剛性が大きくなるに従って近似解に近づく傾向にある。

Fig. 4 は非線形解析による荷重-変形曲線であるが、完全弾塑性性の $S-S$
 曲線における最終耐力値に対し、残留応力を考慮した場合の最終耐力
 値が下まわっており残留応力の影響が大きいことを示している。又 α

の傾向は水平材の剛性が大きくなるほど著しい。Fig. 5 は水
 平材剛性が $\alpha=1.0$ の場合の最終耐力時の変形状態を示している。
 水平材の影響が表れた半相当変形挙動である。左に
 柱材のバネが最初に降伏に達するバネ位置を示したのが Fig.
 6 である。 $\alpha=0.02$ で中央部の内側バネが、 $\alpha=0.04 \sim 0.5$ で下段
 水平材の内側バネが、 $\alpha=1$ で中段下段水平材位置の外側, 内側
 バネが同時に降伏している。水平材剛性変化による最終耐
 荷力曲線は道路橋示方書の曲線より大きな値となる。

文献：野上 伸彦 剛性要素法による柱座屈解析とその改良

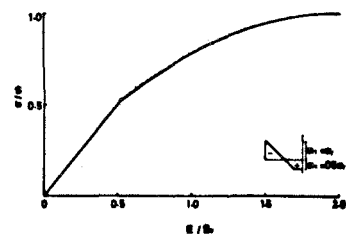


Fig. 3 耐力-ひずみ曲線

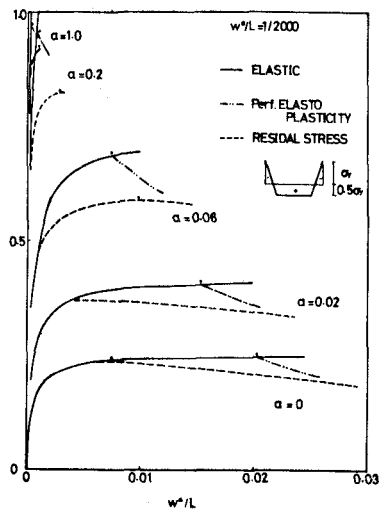


Fig. 4 水平材剛性変化による荷重-変形曲線

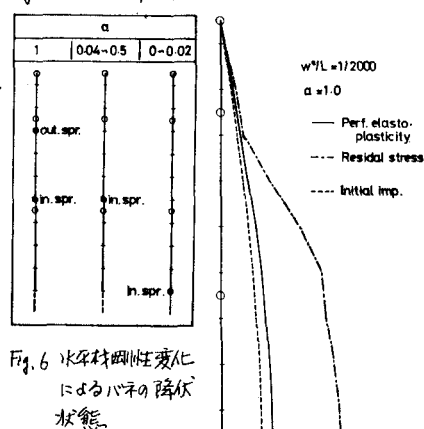


Fig. 6 水平材剛性変化によるバネの降伏状態

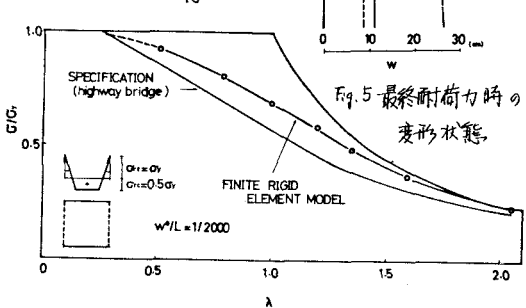


Fig. 5 最終耐力時の変形状態

Fig. 7 水平材剛性変化による最終耐力曲線