III－20　有限要素圧密方程式のラプラス変換による解法

石川島播磨重工業　正　加藤一行

1. まえがき

土質力学における主要な問題のひとつである圧密問題に有限要素法を適用する試みは興味深いものである。現在までに多くの研究者によってこの試みがなされ、かつ成果を収めている。有限要素圧密方程式はほとんどが Biot の圧密方程式[1]をある変分原理によって有限要素方程式に定式化したものであるが、用いた変分原理によって二つの定式化の手法が考えられる。ひとつは有限要素圧密解析の主流をなすもので、Gurtin の変分原理を用いて定式化するものである（例えば[2],[3]）。一方の手法は Biot の方程式をラプラス変換してその像空間において変分原理を適用して有限要素方程式を組みたて、その像空間における方程式を物理空間に逆変換して有限要素方程式を得る手法である（例えば[4],[5]）。本論で述べようとする手法はこの後者に属するものであるが、元来の手法がラプラス逆変換をして方程式を得てそれを前進差分的に解くのに対し、本論の方法は像空間において、すなわちラプラス変換された有限要素方程式を直接解いて、その像空間の解をラプラス逆変換して物理空間における解を得るものである。この手法は線形粘弾性体の解析[6]に適用して成果を収めている。

本論では、ラプラス変換された有限要素方程式の定式化の手法は紙面の都合上述べることができないのでラプラス変換された汎関数と要素方程式を記すにとどめるが詳しくは文献[5]を参照願いたい。オ3節にはラプラス変換された方程式の解法を示したが、さらに詳しくは文献[6]を参照されたい。オ4節では本手法によって均質な地盤の一次元圧密問題を例題として解き、解析解と比較している。

2. ラプラス変換された汎関数と要素方程式

Biot の圧密方程式系を全てラプラス変換し、ラプラス変換された変位 $\bar{u}_i$ と間ゲキ圧 $\bar{p}$ に関する汎関数を各々つくり、その二つの汎関数を結合して不足分を補うと次の汎関数 $Q(\bar{u}_i, \bar{p})$ が得られる。

$$Q=\int_v\left[\frac{1}{2}(\lambda\bar{\theta}^2+2\mu\bar{\varepsilon}_{ij})-\frac{k}{2s}(\bar{p}|_i)^2-\bar{p}\bar{\theta}\right]dV-\int_s\bar{T}_i\bar{u}_i\,dS \quad \cdots①$$

ここに、λ, μ は Lamé 定数、k：透水係数、ε_{ij}：ヒズミテンソル、θ：体積ヒズミ、T_i：表面力ベクトル、$|_j$：偏微分記号であり、s はラプラス変換のパラメータで例えば、$\bar{u}_i=\int_0^\infty u_i e^{-st}dt \quad \cdots②$ である。

この汎関数を行列表示し、$\partial Q/\partial\bar{u}_i=0$, $\partial Q/\partial\bar{p}=0$ とおくと各々から次の要素方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}[K]\{\bar{u}\}-[L]^T\{\bar{p}\}&=\{\bar{b}\}\\-[L]\{\bar{u}\}-\frac{1}{s}[M]\{\bar{p}\}&=\{0\}\end{aligned}\right\}\cdots③$$

ここに、$[K]$：剛性マトリックス、$[L]$：相互作用マトリックス、$[M]$：透水性マトリックスである。各々の内容については文献[5]を参照願いたい。

3. ラプラス変換された有限要素方程式の解法

いま前節で求めた要素方程式③を系全体に組みあげると次の方程式を得る。

$$[A]\{\bar{u}\} - [B]\{\bar{p}\} = \{\bar{f}\} \quad \cdots④$$

$$-[C]\{\bar{u}\} - 1/s[D]\{\bar{p}\} = \{0\} \quad \cdots⑤$$

ここで、$\{\bar{u}\}, \{\bar{p}\}, \{\bar{f}\}$ はそれぞれラプラス変換された節点変位ベクトル、節点間ゲキ圧ベクトル、節点荷重ベクトルである。まず変位解について求める。⑤を $\{\bar{p}\}$ について解いて、④に代入して且つ変形すると、

$$\frac{1}{s}[A]\{\bar{u}\} + [B]^*\{\bar{u}\} = \frac{1}{s}\{\bar{f}\} \quad \cdots⑥$$

ここに、$[B]^* = [B][D]^{-1}[C]$

を得る。いま $\{\bar{u}\}$ が⑥の右辺を 0 とした固有値方程式の固有ベクトル Δ_j でもって次式で与えられたとする。

$$\{\bar{u}\} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j \Delta_j \quad \cdots⑦$$

この⑦を⑥に代入すると

$$\frac{1}{s}[A]\sum\bar{d}_j\Delta_j + [B]^*\sum\bar{d}_j\Delta_j = \frac{1}{s}\{\bar{f}\} \quad \cdots⑧$$

となる。さらにこの式の各項に前から Δ_j^T を乗じて、固有ベクトルの直交関係

$$\Delta_i^T[A]\Delta_j = 0\ (i \neq j),\ \neq 0\ (i=j) \quad \cdots⑨$$

を用いて整理すると次式を得る。

$$(1/s - \alpha_j)\bar{d}_j = 1/s\,\bar{f}_{ij} \quad \cdots⑩$$

ここに、α_j は⑥の同時式の固有値であり、

$\bar{f}_{ij} = \Delta_j^T\{\bar{f}\}/\Delta_j^T[A]\Delta_j$ である。

さらに、⑩を $\bar{d}_j$ について解くと次式を得る。

$$\bar{d}_j = \bar{f}_{ij} / (1 - s\alpha_j) \qquad \cdots ⑪$$

さて，物理空間における変位 $\{u\}$ は，⑦をラプラス逆変換して得られるから

$$\{u\} = \sum d_j(t)\Delta_j \qquad \cdots ⑫$$

ここで，$d_j(t)$ は $\bar{d}_j$ のラプラス逆変換であって，次節で一次元圧密問題に対して具体的に求める。

間ゲキ圧に関する解は⑤を $\{u\}$ について解いて，④に代入した式

$$[A]^*\{\bar{p}\} - \frac{1}{s}[D]\{\bar{p}\} = [C][A]^{-1}\{\bar{f}\} \qquad \cdots ⑬$$

ここに $[A]^* = [C][A]^{-1}[B]$

に対して変位解と同じ手順を繰返せば良く，結局

$$\{p\} = \sum C_j(t) x_j \qquad \cdots ⑭$$

$$\bar{C}_j = s\bar{f}_{2j} / (1 - \beta_j s) \qquad \cdots ⑮$$

となる。ここで $\bar{f}_{2j} = x_j^T[C][A]^{-1}\{\bar{f}\} / x_j^T[D]x_j$ であり β_j 及び x_j は⑬の固有値及び固有ベクトルである。

4. 計算例 ‥‥‥一次元圧密問題

計算例として，地表面に一定荷重を受けた均質な地盤の一次元圧密問題を解く。この条件のもとにおいては全体系の有限要素方程式は次式となる。

$$(\lambda + 2\mu)[A_1]\{\bar{u}\} - [B_1]\{\bar{p}\} = \{\bar{f}\} \qquad \cdots ⑯$$

$$-\ [C_1]\{\bar{u}\} - \frac{k}{s}[D_1]\{\bar{p}\} = \{0\} \qquad \cdots ⑰$$

一定荷重であるので $h(t)$ を *Heaviside* の単位ステップ関数とすると $\{f\} = \{f_0\}h(t)$ となり，$\{\bar{f}\} = \frac{1}{s}\{f_0\}$ となるので，$k(\lambda+2\mu) = C_v$ とおくと $\bar{d}_j$ 及び $\bar{C}_j$ はそれぞれ次式で表わされる。

$$\bar{d}_j = \frac{k f'_{1j}}{(C_v - \alpha_j s)s} \quad \left(f'_{1j} = \frac{\Delta_j^T\{f_0\}}{\Delta_j^T[A_1]\Delta_j} \right) \qquad \cdots ⑱$$

$$\bar{C}_j = \frac{f'_{2j}}{(C_v - \beta_j s)} \quad \left(f'_{2j} = \frac{x_j^T[C_1][A_1]^{-1}\{f_0\}}{x_j^T[D_1]x_j} \right) \qquad \cdots ⑲$$

解は⑱，⑲をラプラス逆変換して $d_j(t)$，$C_j(t)$ を求めて⑦及び⑭に代入すれば良いので $d_j(t)$，$C_j(t)$ を求めると

$$d_j(t) = \frac{f'_{1j}}{(\lambda+2\mu)}\left\{1 - \exp\left(\frac{C_v}{\alpha_j}t\right)\right\} \qquad \cdots ⑳$$

$$C_j(t) = -\frac{f'_{2j}}{\beta_j}\exp\left(\frac{C_v}{\beta_j}t\right) \qquad \cdots ㉑$$

となる。この結果を解析解と比較してFig-1，Fig-2 に示した。変位（沈下）は少し大きめであるがほぼ同じ曲線を描き，間ゲキ圧は時間の小さい部分では乱れるがほぼ良好な結果を与えている。

5. 結語

本論で示した手法は一次元問題に対しては一応の成果を得たと考えるが適用性等については今後の課題となるであろう。さらに均質系の一次元問題に限れば⑯，⑰から明らかなように線形粘弾性骨格を持った土の圧密解析にも適用可能であると考える。

参考文献 [1]：Biot, M.A.　J. Appl. Phys. vol.12 Feb 1941
[2]：Ghaboussi, J. 他　Int. J. Num. Meth. Eng. vol.5 1973
[3]：Yokoo, Y. 他　Soils Foundation vol.11 No.1 1971
[4]：Booker, J.R.　Q. J. Mech. Appl. Math. vol.16 1973
[5]：加藤一行　石川島播磨技報 vol.18 No.5 1978
[6]：加藤一行　第33回土木学会講論集第1部 p.71 1978

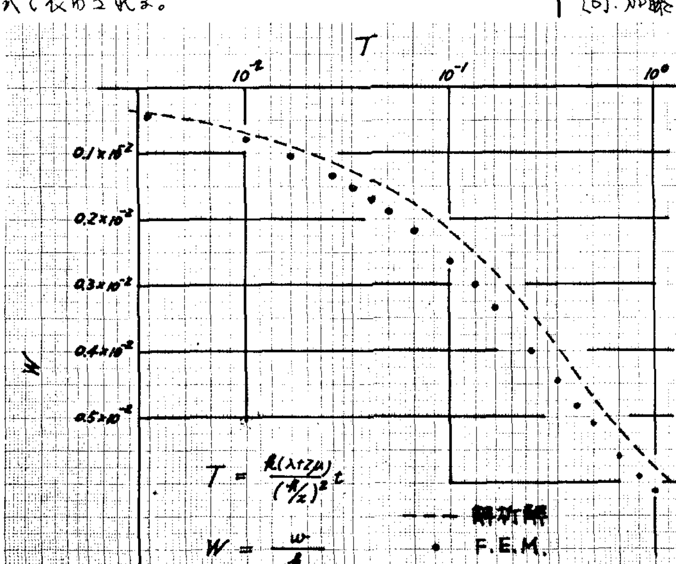

Fig.1 時間－沈下曲線

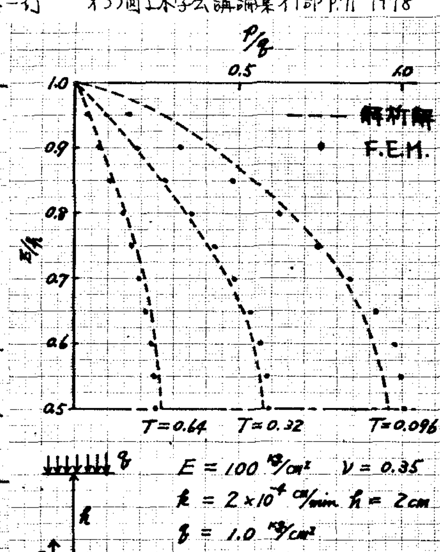

Fig.2 アイソクローン