II－1　水文時系列における季節変動成分の解析について

中央大学理工学部　正会員　林　泰造
中央大学　大学院　学生員　○大橋　正和

1．まえがき

近年，非定常時系列解析のいろいろな理論が提案され，水文時系列への適用について数多く報告されている。中でも，Box and Jenkins法と呼ばれるARIMAモデル，SEASONALモデル等は，非定常性を解析する有力な方法と考えられる。一般に，時系列の成分としては，傾向変動成分，周期変動成分，確率変動成分の3つに分解される。本研究では，傾向変動成分がほとんど認められないと考えられる時間単位が，月，旬等のデータについて，平均と標準偏差の年内の周期変動成分，すなわち季節変動成分の解析をし，時系列の標準化を行い，さらに標準化を行った時系列について統計的性質を調べその特性を明らかにした。定常性については，2次オーダーまでの弱定常を考える。

2．季節変動成分の解析

i）準備

まず，一般的な傾向変動成分と周期変動成分をもった非定常時系列 $X_{p,\tau}$ を考える。
ここで，τ：基本周期（月，週単位等）$\tau=1,\cdots,\omega$，p：年数，$p=1,\cdots,n$，である。
$X_{p,\tau}$ の平均に関する傾向変動成分を除去した時系列を $Y_{p,\tau}$，さらに標準偏差について除去した時系列を $Z_{p,\tau}$ とする。本研究では，月，旬等のデータを $Z_{p,\tau}$ と見なし，季節変動成分の解析を行なった。

ii）平均と標準偏差の季節変動成分

月単位，旬単位のデータについては，傾向変動成分が認められない場合が多く，その様な時系列は，季節変動成分にのみ着目すればよい。月単位データについてコレログラムを求める。その結果，同じ月毎の相関が高いことに着目して時系列を1年毎に並べ，行列を作ると，（他の時間単位の場合も同様）

$$\begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & \cdots\cdots\cdots & Z_{1,\omega} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & \cdots\cdots\cdots & Z_{2,\omega} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n,1} & Z_{n,2} & \cdots\cdots\cdots & Z_{n,\omega} \end{bmatrix}$$

次に，上記の行列について次式で表わされる周期相関係数を求める。

$$r_{k,\tau}=\frac{\frac{1}{n^*}\sum_{p=1}^{n^*}Z_{p,\tau}Z_{p^*,\tau^*}-\frac{1}{nn^*}\sum_{p=1}^{n}Z_{p,\tau}\sum_{p=1}^{n^*}Z_{p^*,\tau^*}}{\left[\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(Z_{p,\tau}-\bar{Z}_{\tau})^2\right]^{1/2}\left[\frac{1}{n^*}\sum_{p=1}^{n^*}(Z_{p^*,\tau^*}-\bar{Z}_{\tau^*})^2\right]^{1/2}}\quad (k=1,\cdots,\ell) \tag{1}$$

$\tau+k\leqq\omega$ のとき　$n^*=n$，$p^*=p$，$\tau^*=\tau+k$，

$\tau+k>\omega$ のとき　$n^*=n-1$，$p^*=p+1$，$\tau^*=\tau+k-\omega$，ℓ：Max. Lags

そこで，この列に着目して各時間成分項（列）について平均と標準偏差を求め，それを次式で表わす。

$$\mu_\tau=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}Z_{p,\tau} \quad (2) \qquad \sigma_\tau=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{p=1}^{n}(Z_{p,\tau}-\mu_\tau)^2\right]^{1/2} \tag{3}$$

(2)，(3)式を用い $Z_{p,\tau}$ は，

$$Z_{p,\tau}=\mu_\tau+\sigma_\tau\epsilon_{p,\tau}\quad (\epsilon_{p,\tau}：確率変動成分) \tag{4}$$

フーリエ級数を用いて表わした μ_τ，σ_τ を $\tilde{\mu}_\tau$，$\tilde{\sigma}_\tau$ とすると，

$$\tilde{\mu}_\tau=\bar{\mu}+\sum_{j=1}^{m}\left(A_j\cos\frac{2\pi j\tau}{\omega}+B_j\sin\frac{2\pi j\tau}{\omega}\right) \tag{5}$$

ここで $\bar{\mu}=\frac{1}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}\mu_\tau$, $A_j=\frac{2}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}(\mu_\tau-\bar{\mu})\cos\frac{2\pi j\tau}{\omega}$, $B_j=\frac{2}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}(\sigma_\tau-\bar{\sigma})\sin\frac{2\pi j\tau}{\omega}$
同様にして

$$\tilde{\sigma}_\tau=\bar{\sigma}+\sum_{j=1}^{m}\left(A_j\cos\frac{2\pi j\tau}{\omega}+B_j\sin\frac{2\pi j\tau}{\omega}\right) \tag{6}$$

ここで $\bar{\sigma}=\frac{1}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}\sigma_\tau$, $A_j=\frac{2}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}(\sigma_\tau-\bar{\sigma})\cos\frac{2\pi j\tau}{\omega}$, $B_j=\frac{2}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}(\sigma_\tau-\bar{\sigma})\sin\frac{2\pi j\tau}{\omega}$
上式から，$\tilde{\mu}_\tau$ ，$\tilde{\sigma}_\tau$ は，$Z_{p,\tau}$ の平均と標準偏差の季節変動成分と考えられる。そこで，(5)(6)式により，$Z_{p,\tau}$ の季節変動成分を除去した時系列を $W_{p,\tau}$ とすると，

$$W_{p,\tau}=(Z_{p,\tau}-\tilde{\mu}_\tau)/\tilde{\sigma}_\tau \tag{7}$$

よって，$W_{p,\tau}$ は，$Z_{p,\tau}$ の確率変動成分と考えることができ，標準化された時系列と呼ぶ。

3．検証

以上の様な方法で原時系列の季節変動成分の解析を行う場合，種々の検証を行う必要がある。

i）フーリエ級数におけるHarmonics数 m の検証

フーリエ級数のHarmonics数 m を決定するために，μ_τ の分散を考えると，

$$Var(\mu_\tau)=\frac{1}{\omega}\sum_{\tau=1}^{\omega}(\mu_\tau-\bar{\mu})^2 \tag{8}$$

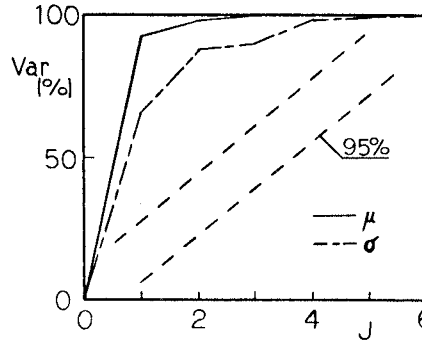
Harmonics数 j に寄与する分散は，

$$Var(\mu_\tau)_j=(A_j^2+B_j^2)/2,\ j=1,\cdots,m \tag{9}$$

(9)式を(8)式の $Var(\mu_\tau)$ との百分率で表わすと，

$$Var(\mu_\tau)_j'=\{Var(\mu_\tau)_j/Var(\mu_\tau)\}\times 100 \tag{10}$$

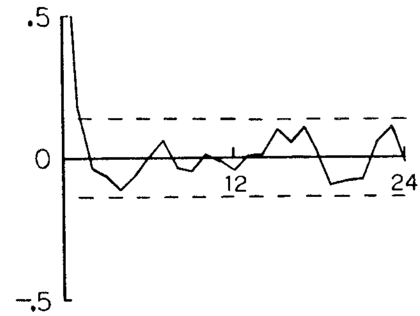
(10)式より得られる $Var(\mu_\tau)_j'$ を図示すると図－1となる。標準偏差についても同様に検討を加える。Salasらの研究によると，一般に m の値は，月単位データに対して約2，週単位データに対して4から56，日単位データに対して6から12であることが示されている。よって図と上記の結果を考察して m を決定する。



図－1　累積分散－J（月単位時系列）

ii）標準化した時系列の検証

まず，標準化した時系列について自己相関係数を求め，コレログラムを描き（図－2），また周期相関係数についてもコレログラムを描き，同時に，(10)式により季節変動成分が除去されているかどうかを検証する。



図－2　自己相関係数（月単位標準化時系列）

4．結論

上記の方法により，演算を行ない，ラインプリンターにより結果を図示することにより，検証を容易にした。種々のデータについて季節変動成分の除去を行なった結果，平均と標準偏差について，フーリエ級数のHarmonics数 m は，ほぼSalasらの結果が妥当であると考えられる。しかし，標準化した時系列に，依然として周期変動成分が存在する場合には，Box and Jenkins法のSEASONALモデルの適用により時系列解析を行なうことが妥当であり，周期変動成分が除去された場合には，ARIMA，ARMAモデル等の適用が考えられる。以上の様に，原時系列の季節変動成分の統計的性質を明らかにすることにより，時系列解析のモデルを選択する際の判断の規準とすることが可能と思われる。

参考文献

1) Box, G.E.P. and Jenkins, G.M.: "Time Series Analysis forcasting and control", Holden-Day, 1976
2) Salas, J.D. and Yevjevich, V.: "Stochastic Structure of Water Use Time Series", Hydrology Paper No.52, Colorado State University, 1972