

群馬高専 正員 ○平田恭久
東京都立大学 正員 伊藤文人

1. まえがき及び最適断面

合成けたでは最適けた高の算出式が導かれていないが、プレートガーダーの場合と同程度の計算で最適けた高を求める方法を考えた。最適断面を求めるときの目的関数としては鋼けた断面積(断面変化点を考慮した平均曲げモーメントを用いる)を用いる。制約条件としては道路橋示方書の規定を用いるが、通常の設計断面で活荷重制約条件は、①圧縮縁 $\sigma_{sc} + \sigma_{xc} \leq \sigma_{ca}$ または $\sigma_{sc} \leq \sigma_{cr}$ (架設時許容応力度) または $A_c \geq A_{co}$ (すれ止め設置のための必要な断面積)、②引張縁 $\sigma_{sx} + \sigma_{ux} \leq \sigma_{ta}$ 、③腹板、上・下フランジの最小板厚または最大幅厚比、の5個の制約条件であることが多く、設計変数は腹板、上・下フランジについて幅と板厚とも定めるので6個となる。上記のような最適化問題では最適解は制約式上にあるので、 $6-5=1$ 次元探索となる。最適解の探索にはけた高が用いられる。一般に最適解の附近では目的関数の値はなべ底状になっており、実用計算でもけた高は5cm単位程度にしているの、最適けた高の算出式には精度より

も計算の簡単なことが要求される。

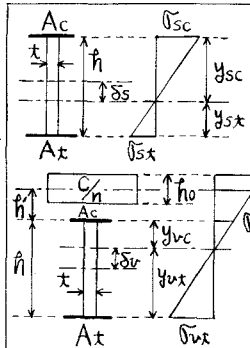
2. 最適けた高の算出式

フランジ厚の影響を無視して図の鋼けた断面及び合成断面からフランジ断面積の算出式を導くと(2)~(5)式が得られる。腹板厚は板厚一定($t=t_0$)または幅厚比一定($t=r$)とすると、設計変数は h, A_c, A_x の3個となり、制約条件は1.の①、②となっている。

プレートガーダーの場合は $dA_s/dh=0$ とすると、 $\sigma_{sc}=\sigma_{ca}$, $\sigma_{sx}=\sigma_{ta}$, $d\sigma_{sc}/dh=0$, $d\sigma_{sx}/dh=0$ なので、(6), (7)式が得られる。これに対し合成けたでは、 σ_{sc}, σ_{sx} は未知数(h を仮定すると計算できる)であり、 $d\sigma_{sc}/dh \neq 0$, $d\sigma_{sx}/dh \neq 0$ なので、算出式を導く

のは簡単ではない。合成けたでは最適けた高の正確な算出式を導くことは困難なので、実用計算に適した簡単な近似式を作ることにする。なお $t=r$ として(2),(3)式を h で微分すると(8),(9)式が得られる。

プレートガーダーについて上フランジの必要な最小断面積を A_{co} とすると、I. $\sigma_c=\sigma_{ca}$, $\sigma_x=\sigma_{ta}$ の条件(ただし $A_c \geq A_{co}$)で h を最適に定める、II. $\sigma_c=\sigma_{ca}$, $\sigma_x=\sigma_{ta}$, $A_c=A_{co}$ の条件で h を定める、III. $\sigma_x=\sigma_{ta}$, $A_c=A_{co}$ の条件(ただし $\sigma_c \leq \sigma_{ca}$)で h を最適に定める、の図に示すような三つの状態があり、各けた高及び状態を区分する曲げモーメントの大きさ M_E, M_R の算出式を導くことができる。合成けたについても同様のことが成り立つものと考えられる。



$$A_s = t h + A_c + A_x \dots (1)$$

$$A_c(s) = \frac{M_s}{\sigma_{sc} h} - \frac{t h}{6} \cdot \frac{2 \sigma_{sc} - \sigma_{sx}}{\sigma_{sc}} \dots (2)$$

$$A_x(s) = \frac{M_s}{\sigma_{sx} h} - \frac{t h}{6} \cdot \frac{2 \sigma_{sx} - \sigma_{sc}}{\sigma_{sx}} \dots (3)$$

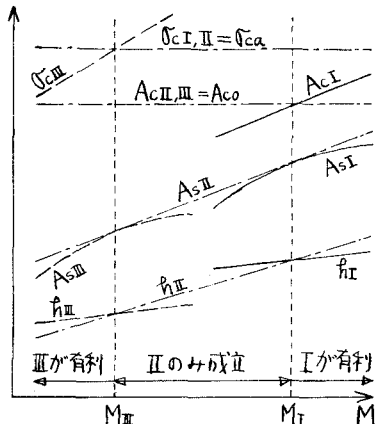
$$A_c(w) = \frac{M_w}{\sigma_{wc} h} - \frac{t h}{6} \cdot \frac{2 \sigma_{wc} - \sigma_{ux}}{\sigma_{wc}} - \frac{c}{h} \left\{ \left(1 + \frac{h}{h} \right)^2 + \left(1 + \frac{h}{h} \right) \frac{h'}{h} \frac{\sigma_{ux}}{\sigma_{wc}} + \left(1 + \frac{\sigma_{ux}}{\sigma_{wc}} \right) \left(\frac{h_0}{h} \right)^2 \right\} \dots (4)$$

$$A_x(w) = \frac{M_w}{\sigma_{wx} h} - \frac{t h}{6} \cdot \frac{2 \sigma_{wx} - \sigma_{uc}}{\sigma_{wx}} - \frac{c}{h} \left\{ \left(\frac{h}{h} \right)^2 + \left(1 + \frac{h}{h} \right) \frac{h'}{h} \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{wx}} + \left(1 + \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{wx}} \right) \left(\frac{h_0}{h} \right)^2 \right\} \dots (5)$$

$$t=t_0 \text{ のとき } h_1 = \left[\frac{6M}{t_0(\sigma_{ca} + \sigma_{ta})} \right]^{1/2} \dots (6), \quad t=r \text{ のとき } h_2 = \left[\frac{3Mr}{\sigma_{ca} + \sigma_{ta}} \right]^{1/3} \dots (7)$$

$$\frac{dA_c(s)}{dh} = \left[-\frac{M_s}{\sigma_{sc} h^2} - \frac{h}{3r} \cdot \frac{2 \sigma_{sc} - \sigma_{sx}}{\sigma_{sc}} \right] + \left[-\frac{M_s}{\sigma_{sc} h} - \frac{h^2}{6r} \frac{\sigma_{sx}}{\sigma_{sc}^2} \right] \frac{d\sigma_{sc}}{dh} + \left[\frac{h^2}{6r \sigma_{sc}} \right] \frac{d\sigma_{sx}}{dh} \dots (8)$$

$$\frac{dA_x(s)}{dh} = \left[-\frac{M_s}{\sigma_{sx} h^2} - \frac{h}{3r} \cdot \frac{2 \sigma_{sx} - \sigma_{sc}}{\sigma_{sx}} \right] + \left[-\frac{M_s}{\sigma_{sx} h} - \frac{h^2}{6r} \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{sx}^2} \right] \frac{d\sigma_{sc}}{dh} + \left[\frac{M_s}{\sigma_{sx}^2 h} - \frac{h^2}{6r \sigma_{sx}^2} \right] \frac{d\sigma_{sx}}{dh} \dots (9)$$



3. 最適けた高の近似式

1) $\bar{\sigma}_{sc} + \bar{\sigma}_{rc} = \bar{\sigma}_{ca}$, $\bar{\sigma}_{st} + \bar{\sigma}_{rt} = \bar{\sigma}_{ta}$ の条件

この条件での最適けた高の附近では近似的に $d\bar{\sigma}_{sc}/d\bar{h} = 0$ とみなせる。 $t = \bar{h}/r$ の場合を考えて、 $A_{t(s)} = A_{t(r)}$ といった式について $d\bar{\sigma}_{sc}/d\bar{h} = 0$ として $\bar{h}$ で微分すると $d\bar{\sigma}_{st}/d\bar{h}$ が得られる。(1)式を $\bar{h}$

$$\bar{h} = -\frac{r}{2} \left(\frac{dA_c}{d\bar{h}} + \frac{dA_s}{d\bar{h}} \right) \dots\dots\dots (10)$$

$$\bar{h} = \frac{r}{2} \left[\frac{M_s}{\bar{h}^2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{sc}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{st}} \right) + \frac{\bar{h}}{3r} \left\{ 4 - \left(\frac{\bar{\sigma}_{st}}{\bar{\sigma}_{sc}} + \frac{\bar{\sigma}_{sc}}{\bar{\sigma}_{st}} \right) \right\} \right] + \left\{ \frac{M_s}{\bar{\sigma}_{st}^2 \bar{h}} - \frac{\bar{h}^2}{6r} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{sc}} - \frac{\bar{\sigma}_{sc}}{\bar{\sigma}_{st}} \right) \right\} \cdot \frac{M_s(\bar{\sigma}_{ta} - \bar{\sigma}_{st}) - M_r \bar{\sigma}_{st} + 2\bar{\sigma}_{ta}/3r \cdot (\bar{\sigma}_{sc} - \bar{\sigma}_{st}) \bar{h}^3 + 0.06 M_r \bar{\sigma}_{st}}{(M_s + M_r) \bar{h} + \bar{\sigma}_{ta}/6r \cdot \bar{h}^4} \dots\dots\dots (11)$$

$$H_2 = d_2 \frac{3M_s r}{\bar{\sigma}_{ta}} \dots\dots\dots (12),$$

$$\bar{h}_2 = \left[a_2 (1+k)^b \frac{3M_s r}{\bar{\sigma}_{ta}} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{h}_1 = \left[a_1 (1+k)^b \frac{6M_s}{t_0 \bar{\sigma}_{ta}} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (14), \text{ ただし } a_1 = 0.496, a_2 = 0.506, b = 0.6$$

で微分して $= 0$ とおくと (10) 式が得られるので、これに (8), (9) 式を代入すると (11) 式となる (ただし $d\bar{\sigma}_{st}/d\bar{h}$ は若干簡略化してある)。(11) 式について $\bar{h}^3 = H_2$ とおくと H_2 の 2 次式となるので、これより根を求めると (12) 式が得られる。 d_2 には $\bar{\sigma}_{sc}$, $\bar{\sigma}_{st}$, $\bar{\sigma}_{ta}$, $k (= M_r/M_s)$ が含まれているが、 d_2 自体は無次元量である。 d_2 を k をパラメータとして表わすと (13) 式が得られる。 $t = t_0$ の場合も同様の手順により (14) 式を導くことができる。

2) $\bar{\sigma}_{sc} + \bar{\sigma}_{rc} = \bar{\sigma}_{ca}$, $\bar{\sigma}_{st} + \bar{\sigma}_{rt} = \bar{\sigma}_{ta}$, $A_c = A_{co}$ の条件

3 個の設計変数に対し 3 個の制約条件があるので、けた高は方程式を解くことにより求められる。 $\bar{\sigma}_{sc}$, $\bar{\sigma}_{st}$ の値が推定できれば (2) 式より $\bar{h}$ が定まる。(2) 式を $\bar{h}$ について解くと、 $t = \bar{h}/r$ のときは (15) 式、 $t = t_0$ のときは (16) 式が得られる。 $\bar{\sigma}_{sc}$, $\bar{\sigma}_{st}$ の簡単な推定式としては (17), (18) 式を用いる。この条件の場合 $\bar{h}$ の値が正確でないと 2 個の応力度の条件は満足できなくなる。実際の設計ではけた高は 5 cm 単位程度に定めているので、定めた $\bar{h}$ に対して、例えば $\bar{\sigma}_{st} + \bar{\sigma}_{rt} = \bar{\sigma}_{ta}$, $\bar{\sigma}_{sc} + \bar{\sigma}_{rc} = \bar{\sigma}_{ca}$ となるように A_{cs} を定めることになる。

$$\bar{h}_2 = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{q^2 + p^3} - q) \right]^{1/3} - \left[\frac{1}{2} (\sqrt{q^2 + p^3} + q) \right]^{1/3} \text{ ただし } p = \frac{2\bar{\sigma}_{sc} A_{co} r}{2\bar{\sigma}_{sc} - \bar{\sigma}_{st}}, q = \frac{6M_s r}{2\bar{\sigma}_{sc} - \bar{\sigma}_{st}} \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{3\bar{\sigma}_{sc} A_{co}}{t_0 (2\bar{\sigma}_{sc} - \bar{\sigma}_{st})} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2M_s t_0 (2\bar{\sigma}_{sc} - \bar{\sigma}_{st})}{3A_{co}^2 \bar{\sigma}_{sc}^2}} - 1 \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\bar{\sigma}_{sc} = \beta (1+k^a) \bar{\sigma}_{ta} \dots\dots\dots (17), \bar{\sigma}_{st} = \frac{\bar{\sigma}_{ta}}{1+k^a \beta} \dots\dots\dots (18)$$

$$\text{ただし } a = 0.35, \beta = 0.425 \quad \text{ただし } a = 0.8, \beta = 0.65$$

3) $\bar{\sigma}_{st} + \bar{\sigma}_{rt} = \bar{\sigma}_{ta}$, $A_c = A_{co}$ の条件

この条件では $d\bar{\sigma}_{sc}/d\bar{h}$ に比べ $d\bar{\sigma}_{st}/d\bar{h}$ の値はかなり小さいので、近似的に $d\bar{\sigma}_{sc}/d\bar{h} = 0$ とみなせる。 $t = \bar{h}/r$ の場合を考えて、(2) 式について $d\bar{\sigma}_{st}/d\bar{h} = 0$ として $\bar{h}$ で微分すると $d\bar{\sigma}_{sc}/d\bar{h}$ が得られる。(10) 式に $dA_c/d\bar{h} = 0$ ($A_c = A_{co}$ より)、(9) 式を代入すると (19) 式となる。(19) 式の $\bar{\sigma}_{sc}$ に (2) 式からの $\bar{\sigma}_{sc}$ を代入し $\bar{\sigma}_{st}$ について解くと (20) 式が得られる。またこの条件での $\bar{\sigma}_{st}$ は近似的に (21) 式のように表わせるので、(20) 式 = (21) 式としてかつ $t\bar{h}/A_{co} = 0$ とおくと (22) 式が得られる。(22) 式の [] 内の値は r の変化に対して殆んど変化しないので、定数とみなして整理すると (23) 式となる。 $t = t_0$ の場合も同様の手順により (24) 式を導くことができる。

$$\bar{h} = \frac{r}{2\bar{\sigma}_{st}} \left\{ \frac{M_s}{\bar{h}^2} + \frac{\bar{h}}{3r} (2\bar{\sigma}_{st} - \bar{\sigma}_{sc}) \right\} + \frac{\bar{h}^2}{6r} \cdot \frac{M_s (\bar{h}^2 + \bar{h}/3r \cdot (2\bar{\sigma}_{sc} - \bar{\sigma}_{st}))}{A_{co} + \bar{h}^2/3r} \dots\dots\dots (19)$$

$$\bar{\sigma}_{st} = \frac{M_s}{\bar{h}^2} \left\{ A_{co} + \frac{\bar{h}^2}{2r} - \frac{2\bar{h}^2/r \cdot A_{co}}{2\bar{h}^2/r + 6A_{co}} \right\} / \bar{h} \left\{ 4A_{co} + \frac{3\bar{h}^2}{2r} + \frac{\bar{h}^3/r \cdot A_{co}}{2\bar{h}^2/r + 6A_{co}} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\bar{\sigma}_{st} = \frac{1}{(1+k)^b} \left(1 + \frac{t\bar{h}}{2t\bar{h} + 6A_{co}} \right) \bar{\sigma}_{ta} \dots\dots\dots (21)$$

$$\bar{h}^3 = \frac{(1+k)^b M_s r}{\bar{\sigma}_{ta}} \left[\frac{\delta^2 + 3\delta + 6}{\delta^2 + 6\delta + 8} \cdot \frac{2\delta + 6}{3\delta + 6} \right] \dots\dots\dots (22), \bar{h}_2 = \left[a_2 (1+k)^b \frac{3M_s r}{\bar{\sigma}_{ta}} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (23)$$

$$\bar{h}_1 = \left[a_1 (1+k)^b \frac{6M_s}{t_0 \bar{\sigma}_{ta}} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (24), \text{ ただし } a_1 = 0.303, a_2 = 0.292, b = 0.6$$

4. 近似式の適合度及びまとめ

正確な $\bar{h}$ は 1), 3) では試行により断面積最小値を求める、2) では二分法により根を求めることから得られる。標準的な設計例 (支間, 主けた間隔, 床版厚, ハンチ高等を定める) を作り、正確な $\bar{h}$ に対する上記近似式の誤差を計算してみた。その誤差は 1), 2), 3) を通じて $\pm 2 \sim 3\%$ 程度である (設計例がカバーする範囲を過ぎると誤差は増加する)。また 3) では A_{co} の変化による $\bar{h}$ の変化は小さい。

上記の近似式はプレートガーダーと同じ形の簡単な式となっており、誤差も比較的小さいので、実用計算に用いることができると思われる。なお合成げたでは曲げモーメントが小さいと $\bar{\sigma}_{sc} > \bar{\sigma}_{ER}$, $\bar{\sigma}_{rc} < 0$ となるケースが生じてくるが、これに対する配慮がまだ成されていないので、 $\bar{\sigma}_{sc} = \bar{\sigma}_{ER}$, $\bar{\sigma}_{rc} = 0$ の条件を追加したときの近似式を導く必要がある。