I－6

Galerkin法による扇板の有限要素化

早稲田大学　学生員 ○井浦雅司
早稲田大学　正　員　平嶋政治

1. まえがき

有限要素の定式化について，変分法と重み付き残差法（以下MWR）との関連について論じることは興味ある問題と思われる。[1)(2)(3)] 現象を支配する微分方程式と等価な汎関数を用いるのが変分法であり，汎関数の存在とは無関係に，微分方程式を直接用いるのがMWRである。Szabo and Lee[(4)]は，MWRとしてのGalerkin法を，平板の平衡方程式に適用してstiffness matrixを求め，同じものがポテンシャルエネルギーにRitz法を適用しても得られることを示した。一方，一般化された変分原理が多くの研究者によって研究されており，それらに基礎をおく有限要素法の発展は著しいものがある。Herrmann[(5)]は，その中の一つであるHellinger-Reissnerの変分原理を用いて混合モデルを提唱している。本報告においては，扇板の曲げ問題を例にとり，断面力表示の平衡方程式，及び構成方程式に，MWRとしてのGalerkin法を適用してelement matrixを求め，Hellinger-Reissnerの汎関数からも同じ形のelement matrixが得られることを示す。

2. 平衡方程式及び構成方程式

扇板の基本方程式は以下の様に表わされるが[(6)]，他の文献と異なる点は，(3)式において係数〝2〟が全体に掛かっていることである。

$$-\partial^2 w/\partial r^2 - M_r/D(1-\nu^2) + \nu M_\theta/D(1-\nu^2) = 0 \qquad (1)$$

$$-\partial^2 w/r^2\partial\theta^2 - \partial w/r\partial r - M_\theta/D(1-\nu^2) + \nu M_r/D(1-\nu^2) = 0 \qquad (2)$$

$$-2\partial^2 w/r\partial\theta\partial r + 2\partial w/r^2\partial\theta - 2M_{r\theta}/D(1-\nu) = 0 \qquad (3)$$

$$-\partial^2 M_r/\partial r^2 - 2\partial^2 M_{r\theta}/r\partial\theta\partial r - \partial^2 M_\theta/r^2\partial\theta^2 - 2\partial M_r/r\partial r$$
$$- 2\partial M_{r\theta}/r^2\partial\theta + \partial M_\theta/r\partial r - q_0 = 0 \qquad (4)$$

ここに，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$，h:板厚，その他の記号は図1に示した通りである。

3. MWRによる定式化

近似解として次の様な形を仮定する。

$$\mathring{M}_r = \sum M_r^j \phi_j \quad (5) \qquad \mathring{M}_\theta = \sum M_\theta^j \phi_j \quad (6)$$

$$\mathring{M}_{r\theta} = \sum M_{r\theta}^j \phi_j \quad (7) \qquad \mathring{w} = \sum w^j \phi_j \quad (8)$$

Galerkin法では重み関数として上記のϕ_iを用いる。残差*

*と重み関数とが要素内で直交するという条件より次式を得る。なお積分範囲は各要素内を示す。

$$\iint \phi_i\left[\underline{\underline{-\partial^2\mathring{w}/\partial r^2}} - \mathring{M}_r/D(1-\nu^2) + \nu\mathring{M}_\theta/D(1-\nu^2)\right] r\,d\theta\,dr = 0 \qquad (9)$$

$$\iint \phi_i\left[\underline{\underline{-\partial^2\mathring{w}/r^2\partial\theta^2}} - \underline{\partial\mathring{w}/r\partial r} - \mathring{M}_\theta/D(1-\nu^2) + \nu\mathring{M}_r/D(1-\nu^2)\right] r\,d\theta\,dr = 0 \qquad (10)$$

$$\iint \phi_i\left[\underline{\underline{-2\partial^2\mathring{w}/r\partial\theta\partial r}} + \underline{2\partial\mathring{w}/r^2\partial\theta} - 2\mathring{M}_{r\theta}/D(1-\nu)\right] r\,d\theta\,dr = 0 \qquad (11)$$

$$\iint \phi_i\left[\underline{\underline{-\partial^2\mathring{M}_r/\partial r^2}} - \underline{\underline{2\partial^2\mathring{M}_{r\theta}/r\partial\theta\partial r}} - \underline{\underline{\partial^2\mathring{M}_\theta/r^2\partial\theta^2}} - \underline{\underline{2\partial\mathring{M}_r/r\partial r}}\right.$$
$$\left. - \underline{\underline{2\mathring{M}_{r\theta}/r^2\partial\theta}} + \underline{\underline{\partial\mathring{M}_\theta/r\partial r}} - q_0\right] r\,d\theta\,dr = 0 \qquad (12)$$

ここで，下線部分$\underline{\underline{\qquad}}$についてのみ部分積分を行なえば以下の様なmatrix表示の代数方程式が得られる。ここで注意すべきことは，下線部分----についても部分積分を行なうと非対称のelement matrixが求まり，これは後に示すHellinger-Reissnerの汎関数より得られるelement matrixと一致しないことになる。さらに，(3)式において係数〝2〟を全体に掛けたのは，以下に示すelement matrixの対称性を保つためであり，これを行なわないと対称性が失なわれることになる。

$$\iint\left(\begin{bmatrix} -\dfrac{\phi_i\phi_j}{D(1-\nu^2)} & \dfrac{\nu\phi_i\phi_j}{D(1-\nu^2)} & 0 & \dfrac{\partial\phi_i}{\partial r}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial r}+\dfrac{\phi_i}{r}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial r} \\ \dfrac{\nu\phi_i\phi_j}{D(1-\nu^2)} & -\dfrac{\phi_i\phi_j}{D(1-\nu^2)} & 0 & \dfrac{\partial\phi_i}{r\partial\theta}\dfrac{\partial\phi_j}{r\partial\theta}-\dfrac{\phi_i}{r}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial r} \\ 0 & 0 & -\dfrac{2\phi_i\phi_j}{D(1-\nu)} & \dfrac{\partial\phi_i}{r\partial\theta}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial r}+\dfrac{\partial\phi_i}{\partial r}\dfrac{\partial\phi_j}{r\partial\theta}+\dfrac{2\phi_i}{r}\dfrac{\partial\phi_j}{r\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\phi_i}{\partial r}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial r}+\dfrac{\phi_j}{r}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial r} & \dfrac{\partial\phi_i}{r\partial\theta}\dfrac{\partial\phi_j}{r\partial\theta}-\dfrac{\phi_j}{r}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial r} & \dfrac{\partial\phi_i}{r\partial\theta}\dfrac{\partial\phi_j}{\partial r}+\dfrac{\partial\phi_i}{\partial r}\dfrac{\partial\phi_j}{r\partial\theta}+\dfrac{2\phi_j}{r}\dfrac{\partial\phi_i}{r\partial\theta} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_r^j \\ M_\theta^j \\ M_{r\theta}^j \\ w^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_0\phi_i \end{bmatrix}\right) r\,d\theta\,dr = \int_s \left[\bar{F}_i\right] ds \qquad (13)$$

(13)式における右辺の項は，境界条件が既定されている時にはその値を入れ，既定されていない時は消失する。[7]

4. Hellinger－Reissnerの変分原理

Hellinger－Reissnerの汎関数は以下の様に書ける。[8]

$$\Pi_R=\iint\Big[-M_r(\partial^2 w/\partial r^2)-M_\theta(\partial^2 w/r^2\partial\theta^2+\partial w/r\partial r)$$
$$-M_{r\theta}(2\partial^2 w/r\partial\theta\partial r-2\partial w/r^2\partial\theta)$$
$$-M_r(M_r-\nu M_\theta)/2D(1-\nu^2)-M_\theta(M_\theta-\nu M_r)/2D(1-\nu^2)$$
$$-M_{r\theta}^2/D(1-\nu)-g_0 w\Big]r\,d\theta\,dr$$
$$+\int_{S_\sigma}(\bar{M}_\nu w_{,n}+\bar{M}_{\nu s}w_{,s}+\bar{Q}_n w)dS$$
$$+\int_{S_u}\{M_\nu(w_{,n}-\bar{w}_{,n})+M_{\nu s}(w_{,s}-\bar{w}_{,s})$$
$$+Q_n(w-\bar{w})\}dS \qquad (14)$$

(14)式において，部分積分を行ない，さらに応力分布及び変位分布をそれぞれの境界条件を満足するように仮定すれば，汎関数は次のようになる。

$$\Pi_R=\iint\Big[(\partial M_r/\partial r+M_r/r)\partial w/\partial r+\partial M_\theta/r\partial\theta\cdot\partial w/r\partial\theta$$
$$-M_\theta/r\cdot\partial w/\partial r+\partial M_{r\theta}/\partial r\cdot\partial w/r\partial\theta+\partial M_{r\theta}/r\partial\theta\cdot\partial w/\partial r$$
$$+2M_{r\theta}/r\cdot\partial w/r\partial\theta-M_r(M_r-\nu M_\theta)/2D(1-\nu^2)$$
$$-M_\theta(M_\theta-\nu M_r)/2D(1-\nu^2)-M_{r\theta}^2/D(1-\nu)$$
$$-g_0 w\Big]r\,d\theta\,dr$$
$$-\int_{S_m}M_{\nu s}w_{,s}dS-\int_{S_\sigma}\bar{V}^n w\,dS$$
$$-\int_{S_u}M_\nu\bar{w}_{,n}\,dS \qquad (15)$$

(15)式の汎関数の変分をとり，$\delta\Pi_R=0$ という条件より，(13)式と同じ element matrix を得ることができる。

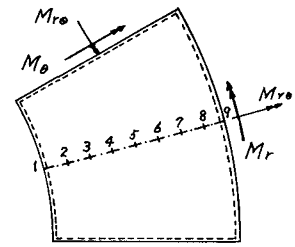
5. 数値計算及びまとめ

数値計算は，満載等分布荷重g_0が載荷し，周辺単純支持の扇板について行なった。[6] 要素は四辺形アイソパラメトリック要素を用いた。それらの結果は表1～3に示す通りである。以上，MWRによる定式化の際に，或る適当な操作を行なうことにより，変分法による定式化と同じ形の element matrix を得た。おわりに貴重な助言を頂いた東京電機大学，松井邦人助教授に感謝の意を表します。

6. 参考文献

(1) Zienkiewicz：マトリックス有限要素法（培風館，1975）
(2) Gallagher：有限要素解析の基礎（丸善，1976）
(3) Hutton & Anderson：Proc. ASCE, Vol. 97, EM5, 1971
(4) Szabo & Lee：Proc. ASCE, Vol. 95, EM3, 1969
(5) Herrmann：Proc. ASCE, EM5, Oct., 1967
(6) 芳村 仁：土木学会論文集（No.82，1962）
(7) Segerlind：応用有限要素解析（丸善，1978）
(8) 山田嘉昭 編：マトリックス法の応用（東京大学出版会，1972）

中心角 $\alpha=\pi/6$.
ポアソン比 $=0$.
中央円弧長 $=\ell$.
直線辺長 $=d$.
$\ell/d=1.0$.
等分布荷重 $=g_0$.
$w=\alpha\cdot g_0\ell^4/D$.
$M_r=\beta\cdot g_0\ell^2$.
$M_\theta=\gamma\cdot g_0\ell^2$.



＜要素分割は 8×8＞

図 1 扇板

（文献(6)参照）

表 1. α の値

No.	α_{FEM}	α_{EXACT} [文献(6)]	$\lvert\alpha_F-\alpha_E\rvert/\alpha_F$ (%)
1	0.0	0.0	0.0
2	1.52×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.3
3	2.81×10^{-3}	2.77×10^{-3}	1.5
4	3.71×10^{-3}	3.66×10^{-3}	1.4
5	4.09×10^{-3}	4.04×10^{-3}	1.4
6	3.89×10^{-3}	3.84×10^{-3}	1.2
7	3.07×10^{-3}	3.04×10^{-3}	1.0
8	1.71×10^{-3}	1.70×10^{-3}	0.4
9	0.0	0.0	0.0

表 2. β の値

No.	β_{FEM}	β_{EXACT}	$\lvert\beta_F-\beta_E\rvert/\beta_F$ (%)
1	0.0	0.0	0.0
2	1.58×10^{-2}	1.54×10^{-2}	2.4
3	2.55×10^{-2}	2.49×10^{-2}	2.3
4	3.29×10^{-2}	3.21×10^{-2}	2.3
5	3.83×10^{-2}	3.73×10^{-2}	2.5
6	4.03×10^{-2}	3.92×10^{-2}	2.8
7	3.65×10^{-2}	3.54×10^{-2}	2.9
8	2.39×10^{-2}	2.32×10^{-2}	3.3
9	0.0	0.0	0.0

表 3. γ の値

No.	γ_{FEM}	γ_{EXACT}	$\lvert\gamma_F-\gamma_E\rvert/\lvert\gamma_F\rvert$ (%)
1	-8.15×10^{-3}	-8.83×10^{-3}	8.4
2	1.49×10^{-2}	1.41×10^{-2}	5.4
3	2.95×10^{-2}	2.86×10^{-2}	3.0
4	3.64×10^{-2}	3.56×10^{-2}	2.4
5	3.70×10^{-2}	3.64×10^{-2}	1.6
6	3.26×10^{-2}	3.24×10^{-2}	0.5
7	2.49×10^{-2}	2.53×10^{-2}	1.3
8	1.55×10^{-2}	1.65×10^{-2}	6.0
9	5.70×10^{-3}	5.71×10^{-3}	0.2