

東海大学工学部 正員 宇部 一馬 正員 冬木 衛
正員 近藤 博 学生員 〇山田 亨

1. まえがき くいその他の縦衝撃における挙動解析法として、スミスは外部抵抗力を含む運動方程式を差分式におきかえて数値計算法を提案した。この解法は国内外で広く利用され、Bowlesその他において計算プログラムが発表されている。筆者らは数年来棒の縦衝撃について研究を行なっているが、スミスの解法について吟味したところ、基本的問題点がいくつか明らかとなった。そこでスミスの解法の一部を修正したが、スミスの解法でも問題になった差分式の性質が原因で、満足できる結果を得られなかった。この報告では、以上の検討過程について述べる。とらに進んで修正、あるいはスミスの解法にかわる解法については、今後検討してつづきの機会に報告したい。

2. スミスの解法および検討方法の概略 (2-1) スミスの解法 スミスの解法はくい打時その他の場合に、図-1のように棒をマスとバネに分割したモデルを用いて、外部抵抗力を含む運動方程式 $\rho \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial D}{\partial x}) \pm R$ (1) を、つぎの差分式におきかえて数値計算を行なう解法(以下スミス解とする)である。

$$D_m = d_m + \frac{1}{2} \Delta t \cdot V_m - (2), C_m = D_m - D_{m-1} - (3), F_m = C_m K_m - (4), V_m = V_{m-1} - (F_{m-1} - R_m) \frac{\Delta t}{W_m} - (5);$$

ここに、 ρ : 単位長さあたりの質量、 D : 変位、 C : 圧縮量、 F : 圧縮力、 V : 速度、 W : 重量、 R : 外部抵抗力、 K : バネ定数、 g : 重力加速度、 Δt : 数値計算の時間間隔; また添字 m は要素の番号を示し、 d と v は一つ前のステップの値を表す。計算は(2)式によって変位 D_m をこの要素に対して決定することから始める。

(2-2) 筆者らの使用した解析の対象および計算モデル ここでは解析の対象として、表-1に示す標準貫入試験をとる。計算モデルは、図-1に示すように一つのマスとしてのハンマーと、マスとバネに分割された完全弾性一様断面棒との衝突を考えた。また特に今回の検討では、基本的問題点を吟味するために、外部抵抗力一つのバネで代表した先端地盤のみを考え、そのカー変形曲線を図-2のように線形とした。(2-3) 検討方法 得られた計算結果を、断面積無限大のハンマーと完全弾性一様断面棒との衝突において、先端地盤との境界条件と変位に関する反射係数 α で定義した、解析解としての St. Venant 解の一般解(以下解析解とよぶ)と比較し、検討を加える。スミス解では、ハンマーが一つのマスで代表されるために、断面積無限大で弾性の無いものと考えられるからである。

3. スミスの提案と、それに対する筆者らの考え方 (3-1) 今回のとりあげた主な問題点 今回の主として、i) 数値計算の時間間隔のとり方、ii) 応力波形、iii) 打撃端境界条件、および

iv) 先端境界条件、について検討する。(3-2) スミスの提案 i) 数値計算の時間間隔は、弾性波速度から求められる時間間隔(critical time interval, T_{cr} とする)を、安全率で除した値を使用する。その安全率は、計算量と精度の向上の兼ね合いから、2 とする。ii) 応力値はあらかじめプロットされるべきで、応力波形に現われるピークは、数値計算の誤りや数値計算の時間間隔が大きすぎたことを示すものである。iii) ハンマーとの間に引張力が働かえないロッド第一要素の応力が引張力となったときに、その応力値を0として、以前と同様の計算をくり返す。iv) 先端地盤は、一つのバネのみで代表する。そのカー変形曲線は図-3に示すようにとり、バネ定数 k_2 は $k_2 = R_u / q - (6)$ で求める。ここに、 R_u : 地盤の動的極限支持力、 q : 地盤の最大弾性変形量; とする。

(3-3) 筆者らの考え方 上述のスミスの提案に対して、筆者らはつぎのように考える。

表-1 標準貫入試験	
ハンマー重量	63.5 kN
ハンマー落下高さ	75 cm
ロッド断面積	5.8 cm ²
ロッド密度	7.85 g/cm ³
ロッド弾性波速度	5120 m/sec

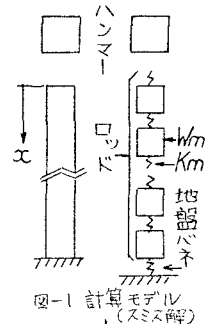


図-1 計算モデル (スミス解)

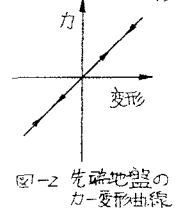


図-2 先端地盤のカー変形曲線

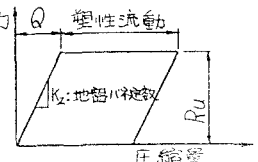


図-3 スミス解 先端地盤

i) 数値計算の時間間隔は critical time interval Δt_c を使用するべきである。これは、物質固有の弾性波速度から決定されるものであり、人為的な操作は中ずとれないからである。ii) 応力波はなめらかな形状の外ではなく、のびを示す実測形状のように、ピークを生じながら弾性体を伝播することがある。iii) ロッド第一要素が引張力となり、たまには、ハンマーとロッドは分離したと考える方がむしろ正しい。分離後は再衝突まで、ロッドの衝撃端で自由端の境界条件となり、ハンマーは自由落下して、両者は別々に解析すべきである。これは筆者らの高速度カメラによる実測結果で確認されている。iv) 地盤を一つのバネで代表するのは、地盤の運動エネルギーを無視するものであり、また地盤のバネから下への運動の伝播を考慮しないものである。さらに図-3に示すように、地盤の動的極限支持力と最大弾性変形量から地盤にバネ定数を決定するのは、動的な問題に対して根拠が不明確である。

4. ロッドおよび地盤のバネ定数 k と変位に関する反射係数 α との関係

ここで、スミス解の境界条件と解析解の境界条件との関係を図-4で、 $A_1 P_1 C_1$ および $A_2 P_2 C_2$ を、それぞれロッドおよび地盤の dynamic

stiffness (断面積 A , 密度 P , および弾性波速度 C の積 APC) とすれば反射係数 α は、 $\alpha = \frac{A_1 P_1 C_1 - A_2 P_2 C_2}{A_1 P_1 C_1 + A_2 P_2 C_2}$ (7) で表わされる。ここで、スミス解の数値計算時間間隔 Δt をとり、その間に影響を及ぼす $C_1 \Delta t$, $C_2 \Delta t$ の距離のロッドおよび地盤のバネ定数を k_1 , k_2 とすれば、 $\alpha = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ (8) または、 $k_2 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} k_1$ (9) の関係が得られる。(9) 式の関係を図-5に示す。

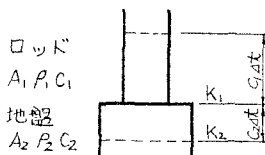


図-4 ロッドと地盤の境界

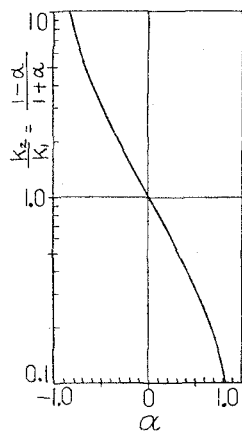


図-5 k と α の関係

5. 筆者らの考えることに対する検証 (5-1) 数値計算時間間隔

図-6はロッド長と50mの場合について、先端固定 ($\alpha = -1.0$) の解析解と、地盤バネ定数 k_2 がロッドの第一要素のバネ定数 k_1 に等しく ($\alpha = 0$)、ロッドを10分割して安全率5倍としたスミス解の応力波形状を示したものである。スミス解の応力波形状は、振動しながら解析解に近似するが、実際に応力波が到達する以前にロッドの各要素が運動を始めたため、ハンマーも振動するために、反射波が衝撃端に返る前にハンマーとロッドが分離するなどの非現実的な挙動を示す。すなわち、物理法則に支配された現象をとるためには、物理法則に従い、critical time interval をそのまま使用するべきであり、人為的に安全率で除した値を使用する必要はない。

(5-2) 応力波形状 図-7に示す実測応力波形状であるように、ピークが生ずることもある。また図-6からわかるように、応力値がなめらかにプロットされるのは、数値計算で critical time interval より小さな値を時間間隔に使用したためである。このことからも、時間間隔の人為的な操作を行なう必要はないことがわかる。(5-3) 衝撃端境界条件 (3-3), iii) に示すとおりである。(5-4) 先端境界条件

次ページ図-8はロッド長と5mの場合について、先端固定 ($\alpha = -1.0$) の解析解と、ロッドを100分割して地盤バネ定数 k_2 をロッドの第一要素バネ定数 k_1 と等しく ($\alpha = 0$) したスミス解の応力波形状を示したものである。スミス解はよく解析解の複雑な動きについている。ところが、スミス解は $\alpha = 0$ であり、解析

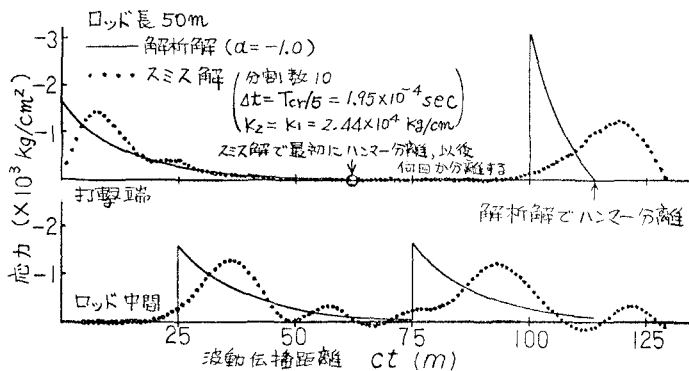
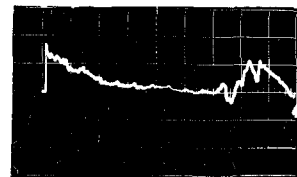


図-6 スミス解と解析解の応力波形状の比較 (スミス解の計算時間間隔は critical time interval の $1/5$)



標準貫入試験

ロッド長 33.94m
ゲージ位置 ロッド頭より2.58m
砂レタ, N値50以上
本打20回, 貫入量 0, 2.0ms/div.
5)

図-7 実測応力波形状

解は $\alpha = -1.0$ であるから、両者が一致するのは不合理である。この不合理は、変位 w の応力を決定する差分式と、一つの地盤バネで応力をとらえ、かつ反射させる境界条件に原因がある。すなわち、図-9で W_p とロッドの最終要素 K_2 とすれば、(2)式から W_p の変位が決定され K_2 が最初に押されたときに発生する応力は、 $K_2 = K_1$ であるために打撃の瞬間にロッド頭端に生ずる応力と等しい。図-8からスミス解の応力値の減少は、1ステップの間ではわずかなものである。よって K_2 と K_1 に発生している応力はほとんど等しいから、(5)式において速度の減少量はきわめて小さい。したがって、ステップでは、(2)式において W_p の変位の増加量が前のステップでの変位量にほぼ等しいものとなり、両者が加えあわされて変位量は約2倍となる。さらに、 K_2 の下側に変位を生ずる物体がないために、 W_p の変位量がそのまま K_2 の圧縮量となるから、 K_2 に働く力も前のステップで働いた力の約2倍となる。したがって固定端に似た挙動を示すのである。図-10はロッド長さ50mの場合について、先端固定の解析解と、ロッドを10分割して図中に示す地盤バネ定数を用いたスミス解の応力を示したものである。①は、最初に地盤バネが押されたときに、前述の原因で2倍の圧縮力が生ずる。したがってピークが1ステップ早く生ずる。応力の反射量は、固定端または自由端において、入射量の2倍が最大値である。ところが、変位と応力より先に決定する差分式によつて⑤は①の5倍という不当に大きな反射応力が発生する。したがって、(2)式から求められる W_p の速度は、上向きに不当に大きくなり、ステップを追って振動し発散する。それによって、ロッド内部に生ずる応力も正負に振動し、のちに発散する。このことから、変位から応力を決定する差分式は、境界の変化にじゃらぶみ対応できないことがわかる。②と③は $\alpha > 0$ であるから、常に引張力をロッド側に反射するはずである。しかし、計算結果では初期の数ステップだけ引張力で反射し、のちに圧縮力で反射するようになる。これは、地盤バネで振動をたす切り、その下に伝播させないことが原因である。そこで、スミスは地盤のバネ定数 k_2 を(6)式から求めている。いまロッドと地盤の dynamic stiffness が決まれば、(7)式から反射係数 α は一定値をとる。そこでロッドの分割数を変化させると、ロッドのバネ定数 K_1 が変化するのど、(9)式の関係から K_2 も変化する。スミスの提案によつて Q は一定値として 0.1 inch とすると、 K_2 が変化するれば(6)式から R_0 が変化する。つまり、計算に使用するロッドの分割数を変化させると地盤の動的境界支持力が変化するようになる。この不合理から、図-3のカー変形曲線は、動的な境界条件を正しく反映していないことがわかる。図-11はロッド長さ50mで10分割した場合について、先端地盤のバネ定数とロッドの一要素のバネ定数と同一としたスミス解と、のちに述べる修正スミス解で、地盤をロッドの延長とした場合の、

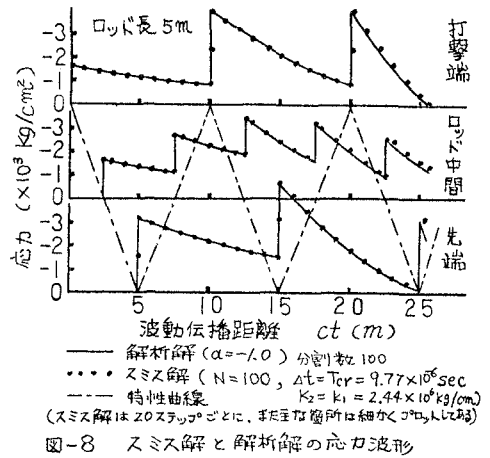


図-8 スミス解と解析解の応力波形

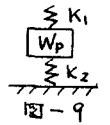


図-9

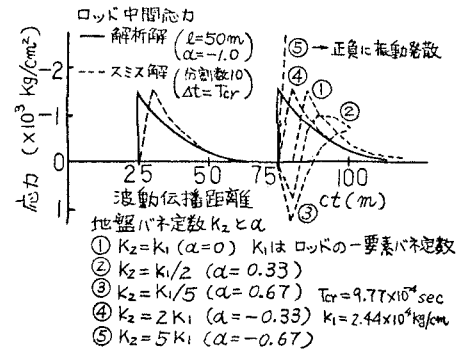


図-10 スミス解と地盤バネ定数 K_2

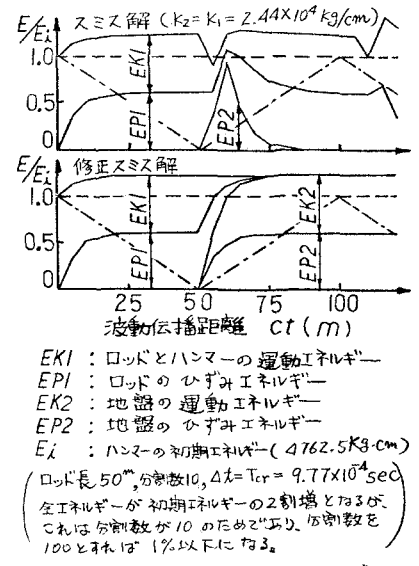


図-11 スミス解と修正スミス解のエネルギー

各瞬間におけるエネルギーを、ハンマーが初期にもっていたエネルギー ($E_0 = 63.5 \text{ kg} \times 75 \text{ cm} = 4762.5 \text{ kg}\cdot\text{cm}$) で基準化したものである。全エネルギーが E_0 の2割増しくらいになるが、これは分割数が少ないためであり、分割数を100にとれば全エネルギーの E_0 に対する増減は1%以下になる。スミス解では、 $ct=55\text{m}$ と $ct=110\text{m}$ で全エネルギーが小さくなっている。これは、ハンマーや地盤とロッドの間の境界条件を正しく反映していない差分式固有の性質によっている。修正スミス解では、地盤内エネルギーがひずみと運動のエネルギーに1:1に分けられる。それに対して、スミス解では明らかに地盤の運動エネルギーが無視されている。しかも、先端地盤のバネの下で波動を打ち切っているために、一度地盤の中に入ってきたエネルギーはほとんどロッドに反射される。よって、地盤を一つのバネで代表するのは、エネルギーの面からも不合理である。

6. 修正スミス解

以上述べてきたように、スミス解は主として、先端境界条件および差分式に問題がある。そこで筆者らはスミス解の特徴である差分式をそのままにして、境界条件のみを修正した修正スミス解と考えた。すなわち図-12に示すように、地盤を半無限の完全弾性一

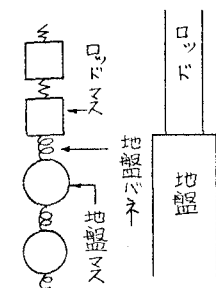


図-12 修正スミス解法のモデル

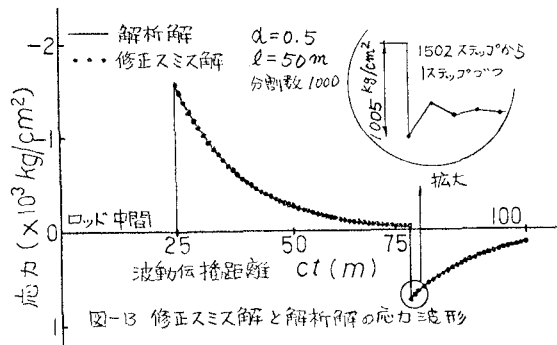


図-13 修正スミス解と解析解の応力波形

機断面棒として、数値計算の時間間隔にあわせてマスとバネに分割した。地盤の dynamic stiffness がロッドのそれと等しい ($\alpha=0$) のときは、今までの応力波形で反射がないものであり、よく解析解にあう。地盤の dynamic stiffness がロッドのそれより小さい ($\alpha>0$) ときの例として、図-13にロッド長さ50m、1000分割で $\alpha=0.5$ の場合をあげる。全体的な挙動はよく解析解とあうが、拡大図に示したように反射波が現れながら解析解に近似する。これも変位から応力を決定する差分式が原因である。地盤の dynamic stiffness がロッドのそれより大きい ($\alpha<0$) のときは、図には示していないが、図-10の⑤のように差分式が境界の変化についてゆかず、正と負に振動し、発散する。

7. まとめ 数値計算における時間間隔は、critical time interval を使用すべきである。2) ロッド第一要素が引張になったとき、ロッドとハンマーの分離を考慮しなければならぬ。3) 応力波形には、ピークを生ずるものもある。4) 地盤を一つのバネで代表し、力のつり合いだけを考慮した先端の境界条件は、動的な境界条件としてふさわしくない。5) 地盤を半無限の完全弾性一機断面棒と仮定して、マスとバネに分割してエネルギーをあわせるような境界条件をとったスミス解を修正したが、満足できる結果を得られなかった。それは、6) 変位から応力を決定する差分式が境界の変化についてゆけないという、基本的な問題があるからである。

8. あとがき 以上述べたように、スミスの解法にはいくつかの問題点がある。もし現在のスミスの解法を使用するならば、各種の非線形性や時間間隔等をうまく考慮し、よく現象にあうものにしても、計算結果が直接に現象を説明するものではないことを念頭に置き、計算結果の利用にあたっては熟練した経験者の判断にゆだねるのがよい。今後の、今回の修正案をさらに修正するか、スミスの解法に代わるもの、たとえば変位から応力を決定するスミス解の差分式より合理的と思われる、各ステップの応力を任意の断面の前後の dynamic stiffness で決定する「重視反射理論」による解法その他を検討するつもりである。

参考文献

- 1) E. A. L. Smith; Impact and Longitudinal Wave Transmission, Trans. ASME, August, 1955.
- 2) E. A. L. Smith; Pile-driving Analysis by the Wave Equation, Proc. ASCE, Vol. 86, SMD, 1960.
- 3) J. E. Bowles; Analytical and Computer Method in Foundation Engineering; Chap. 11, McGraw-Hill, 1972.
- 4) たとえば、中郡 謙、近藤 嘉彦; 標準貫入試験におけるロッドの貫入機構に関する理論研究と基礎実験、東海大学紀要工学部, No. 2, 1972.
- 5) 中郡 謙、近藤 嘉彦; 標準貫入試験におけるロッドの貫入機構に関する実験的研究(第1報)、東海大学紀要工学部, No. 1, 1973.