II－14　混合砂礫の掃流砂量計算式

中央大学理工学部　正会員　林　泰造
中央大学大学院　学生員　○尾崎幸男

1. はじめに

混合砂礫河床において，粒径別の掃流砂量を予測する場合に最も重要な点は粒径別の限界掃流力の評価にあるものと思われる。

本研究は，芦田・道上，平野によって修正されたEgiazaroffの粒径別限界掃流力の式と平均粒径より大きい粒径に対して著者等の導いた揚力係数の補正係数を用いて，一様粒径の掃流砂量式として提案された林・高羽の式を混合砂礫の掃流砂量式に拡張し，芦田・道上の式および実験値との比較を行ってその適合性を検討したものである。さらに，本研究では，従来から物理的意味が不明瞭であり混合砂礫の流砂量を表示する係数としては不適当であると見做されてきたEinsteinの遮蔽係数の物理的意味も明らかにした。

2. 林・高羽の式

林・高羽は一様粒径の掃流砂量式として次式を提案した。

$$q_B/\sqrt{(s-1)gd^3} = 5.6\, P_a\, I\, \tau_{*e}^{3/2} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに，$P_a = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta_{*2}}^{\eta_{*1}} \exp(-t^2)\,dt$,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2}\exp(-\eta_{*1}^2) + \frac{1}{2}\exp(-\eta_{*2}^2) - \eta_{*1}\int_{\eta_{*1}}^{\infty}\exp(-t^2)dt + \eta_{*2}\int_{-\infty}^{\eta_{*2}}\exp(-t^2)dt\right\},$$

$\eta_{*1} = B_*\Psi - 1/\eta_0$, $\eta_{*2} = -B_*\Psi - 1/\eta_0$, $1/\Psi = \tau_{*e}$.

林等は　B_* , η_0　についてEinsteinの値

$$B_* = 1/7 \cong 0.143\ ,\quad \eta_0 = 1/2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

を用い，一様粒径の実験値と比較して良好な結果を得た。但し，(1)式の定数 5.6 は砂粒の packing 状態による若干の補正を施したものである。

ところで，B_* について，林等の定義による無次元限界掃流力を $\hat{\tau}_{*c}$ と示すと，$B_* = 4\,\hat{\tau}_{*c}$ $\cdots\cdots\cdots(3)$ が成り立つ。林等の限界掃流力は実験値から逆算される限界掃流力 τ_{*c} より何割か小さい値をとるものと思われる。そこで，　$\hat{\tau}_{*c} = \beta_*\,\tau_{*c}$ $\cdots\cdots\cdots(4)$ とおく。限界掃流力は一般に砂粒 Reynolds 数の関数として与えられるが，ここでは平均値 $\tau_{*c} = 0.05$ $\cdots(5)$ を用いる。(2),(3),(4)および(5)式から β_* は次のように決まる。　$\beta_* \cong 0.714$ $\cdots\cdots\cdots(6)$

また，η_{*1}, η_{*2} は(4)式を代入すると(7)式となる。

$$\eta_{*1} = 4\beta_*\tau_{*c}/\tau_{*e} - 1/\eta_0\ ,\quad \eta_{*2} = -4\beta_*\tau_{*c}/\tau_{*e} - 1/\eta_0 \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

本研究では(1)式の定数 5.6 は混合砂礫においても変わらないとし，(6),(7)式を用いて(1)式を粒径別の掃流砂量式に拡張することにする。

3. 混合砂礫の粒径別掃流砂量式

まず最初に以下のように記号を定義する。

$i_B q_B$ ：粒径別の掃流砂量，

i_B, i_b ：それぞれある粒径あるいは粒径範囲の砂礫が流水中および河床砂礫中に占める割合，

d_i ：ある粒径あるいは粒径範囲の砂礫の平均粒径，

τ_{*i}, τ_{*ei} ：粒径別の無次元掃流力および有効掃流力，

τ_{*ci}, τ_{*cm} ：粒径別および河床砂礫の平均粒径 d_m の無次元限界掃流力，

u_*, u_{*e} ：摩擦速度および有効摩擦速度，

u_{*ci}, u_{*cm} ：粒径別および河床砂礫の平均粒径 d_m の限界摩擦速度。

また，次なる関係式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{*i} = u_*^2/[(s-1)gd_i],\ \tau_{*ei} = u_*^2/[(s-1)gd_i],\\ &\tau_{*ci} = u_{*ci}^2/[(s-1)gd_i],\ \tau_{*cm} = u_{*cm}^2/[(s-1)gd_i].\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

ところで，Einsteinが混合砂礫の流砂量を表示する際導入した遮蔽係数 ξ は，従来から物理的意味が不明瞭であり，混合砂礫の流砂量を表わす係数としては不適当であると見做されてきたように思う。このように言われてきた原因としては，Einsteinは遮蔽係数 ξ を次のように導入したためであろうと考えられる。即ち，一様粒径に対して　$\Psi_* = \Psi\ (= 1/\tau_{*e})$ $\cdots\cdots\cdots(9)$ とおいたとき，混合砂礫に対して

$$\Psi_* = \xi\, Y(\beta^2/\beta_*^2)\,\Psi \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

と表示した点にある。$Y(\beta^2/\beta_*^2)$ は揚力の補正係数である。(10)式をみると，遮蔽係数 ξ は有効掃流力 $\Psi\ (= 1/\tau_{*e})$ の補正係数に見受けられるわけで，その性格があいまいである。しかし，前節で示したように B_* が限界掃流力と同等のものであることから，Einsteinの ξ は(10)式ではなく，B_* から出てきたものであると考えること

ができる。即ち混合砂礫の場合のB_*をB_{*i}と示せば，

(3),(4)式から　$B_{*i} = 4\beta_* \tau_{*ci} = 4\beta_* \tau_{*cm}\xi$ ·····(11)

したがって　$\Phi_* = Y(\beta^2/\beta_*^2)\Phi$ ------------(12)

と表わすべきものであったことがわかる。ここで(11)式の$4\beta_*\tau_{*cm}$が一様粒径のときのB_*に等しいならば

(11)式は　$B_{*i} = B_*\xi$ ------------(13)

と書き直され，$B_{*i}\Phi_* = B_*\xi Y(\beta^2/\beta_*^2)\Phi$ ------(14)

を得る。(14)式は結果的にはEinsteinの表示と一致することになるが，(11)式から，　$\xi = \tau_{*ci}/\tau_{*cm}$ ···(15)

の関係式が得られる。このことから，Einsteinのξは(10)式のように有効掃流力の補正としてではなく，むしろ(15)式の粒径別の限界掃流力として厳然たる物理的意味をもっていたことが知れる。ところが，以前から Einsteinの補正は小さい粒径に対して過大であることが示されており，最近ではEgiazaroffの式やその修正式が用いられている。

本研究で対象としている林・高羽の式はEinsteinのモデルに基づいているが，粒径別限界掃流力について本研究では次の芦田・道上，平野によって修正されたEgiazaroffの式を用いる。但し，$\xi_i = \tau_{*ci}/\tau_{*cm}$である。

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_i = 0.843/[d_i/d_m] & : d_i/d_m \leq 0.4 \\ \xi_i = [\log_{10}19/\log_{10}(19d_i/d_m)]^2 & : d_i/d_m \geq 0.4 \end{array}\right\} \cdots\cdots(16)$$

$$\text{または，}\left.\begin{array}{ll} \tau_{ci}/\tau_{cm} = u_{*ci}^2/u_{*cm}^2 = 0.843 & : d_i/d_m \leq 0.4 \\ \tau_{ci}/\tau_{cm} = [\log_{10}19/\log_{10}(19d_i/d_m)]^2 d_i/d_m & : d_i/d_m \geq 0.4 \end{array}\right\} \cdots(16\cdot a)$$

次に，$d_i/d_m > 1.0$の粒径は平均粒径面より頭一つ出ているためにEinsteinの揚力係数$C_L = 0.178$は$d_i/d_m > 1.0$の粒径に対して若干変わることが予想される。いま河床はrough wall状態であるとする。Einsteinは揚力Lをd_iについて：　$L = (C_L/2)\rho[u^2]_{z=0.27d_m}\frac{\pi}{4}d_i^2$ ----(17)

と表わした。但し，$k_s = d_{65} = d_m$とした。

本研究では$d_i < d_m$の粒径に対してはEinsteinと同様に考え，$d_i > d_m$についてのみ揚力係数C_Lが粒径の影響を受けるものと考えて，このときの揚力を次のようにまとめることとする。　$d_i > d_m$の粒径について；

$$L = (C_L/2)\rho[u^2]_{0.27d_i}\frac{\pi}{4}d_i^2 = (C_{Li}/2)\rho[u^2]_{0.27d_m}\frac{\pi}{4}d_i^2 \cdots\cdots(18)$$

(18)式から，　$C_{Li} = C_L\, u_{0.27d_i}^2/u_{0.27d_m}^2 \equiv C_L/Y_i$ ···(19)

が得られる。ここに，Y_iは揚力係数の補正を表わす。

$$\text{ここに，}\left.\begin{array}{ll} Y_i = 1.0 & : d_i/d_m \leq 1.0 \\ Y_i = [\log_{10}8/\log_{10}(8d_i/d_m)]^2 & : d_i/d_m \geq 1.0 \end{array}\right\} \cdots(20)$$

そこで，混合粒径の効果を(16)式の遮蔽係数ξ_i(即ち粒径別限界掃流力)と(20)式の揚力係数の補正係数Y_iのみで表わすこととし，林・高羽の式を混合砂礫の粒径別掃流砂量式に拡張すると次の(21)式をうる。

$$i_B q_B/[i_b\sqrt{(s-1)gd_i^3}] = 5.6\, P_{ai} I_i \tau_{*ei}^{3/2} \cdots(21)$$

ここに，$P_{ai} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta_{*2i}}^{\eta_{*1i}} \exp(-t^2)\,dt$，

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2}\exp(-\eta_{*1i}^2) + \frac{1}{2}\exp(-\eta_{*2i}^2) - \eta_{*1i}\int_{\eta_{*1i}}^{\infty}\exp(-t^2)dt + \eta_{*2i}\int_{-\infty}^{\eta_{*2i}}\exp(-t^2)dt\right\},$$

$\eta_{*1i} = 4\beta_*\tau_{*cm}\xi_i Y_i/\tau_{*ei} - 1/\eta_0$，$\eta_{*2i} = -4\beta_*\tau_{*cm}\xi_i Y_i/\tau_{*ei} - 1/\eta_0$，

$\beta_* = 0.714$，$1/\eta_0 = 2.0$．

従来の研究(芦田・道上，平野)と比較のために(21)式を書き直すと　$q_{B*i} = 5.6\,P_{ai} I_i \tau_{*ei}$ ----(22)

を得る。ここに，$q_{B*i} \equiv i_B q_B/[i_b u_{*e} d_i]$．

(22)式で　$\tau_{*ei} \gg \tau_{*ci}$のとき　$P_{ai} \fallingdotseq 1.0$，$I_i \fallingdotseq 2.0$

従って，　$q_{B*i} \fallingdotseq 11.2\,\tau_{*ei}$ ---------(23)

一方，芦田・道上はBagnoldのモデルを用い次式を導いた。　$q_{B*i} = 17\tau_{*ei}(1-\tau_{*ci}/\tau_{*i})(1-u_{*ci}/u_*)$···(24)

(24)式で　$\tau_{*i} \gg \tau_{*ci}$のとき，$q_{B*i} \fallingdotseq 17\,\tau_{*ei}$ ···(25)

となり，本研究の(23)式とほぼ同様の結果を得る。

本研究の(22)式と実験値(芦田・道上，平野)，芦田・道上の式(24)との比較をそれぞれ図-1，図-2で示した。但し，両図とも$\tau_{*cm} \fallingdotseq 0.05$，$\tau_{*ei} \fallingdotseq \tau_{*i}$の場合である。

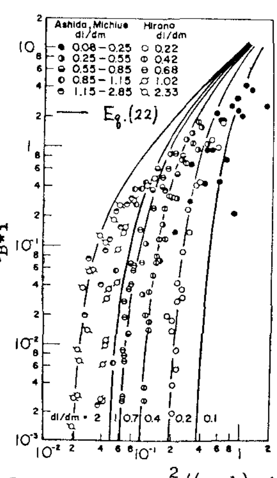

図-1.

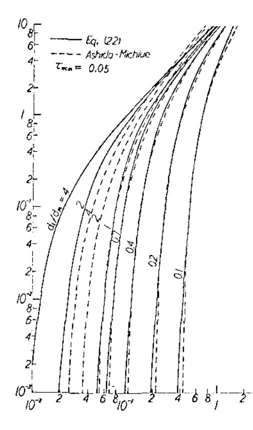

図-2.

4. むすび

実験値および芦田・道上の式との比較の結果，本研究の(22)式は粒径別の掃流砂量式としてかなり有用性のある式であるものと思われる。

参考文献：林・高羽(1977.2水講)，平野(1971.11，1972.11論文報告集)，芦田・道上(1972.10論文報告集)，Einstein(1950)，Egiazaroff(1965)．