I－16　最適化手法のアルゴリズムについて

群馬高専　正員　○平田恭久
東京都立大学　正員　伊藤文人

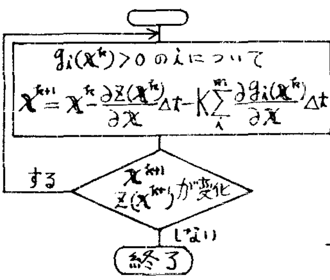
# 1. はじめに

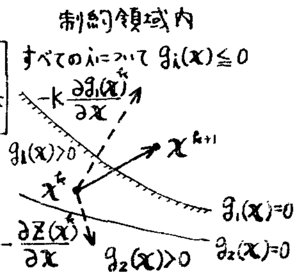
設計では常に最適化が考えられている。最適化手法のアルゴリズムについて考察を加えることは，設計方法の改善を考えていく上で意義のあることと思われる。ここでは一部の最適化手法を取り上げ，プレートガーダーの設計を念頭に置いてそのアルゴリズムを検討してみた。

# 2. 非線形最適化手法のアルゴリズム

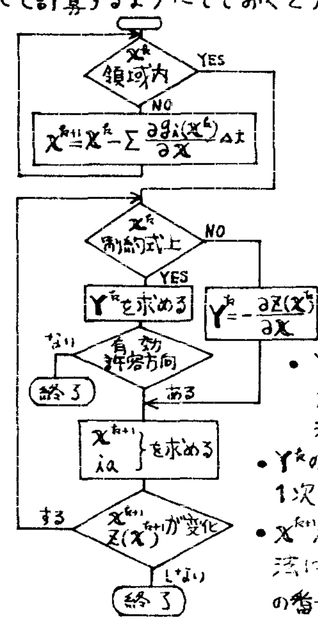
最適化手法としては，SUMTのように制約条件のない問題に変換して解く方法，反復線形計画法のように線形近似して解く方法などが最適設計法によく用いられるが，ここでは，最適解を探索していく過程での解の動き方を調べるため，制約条件つき最急勾配法と許容方向法を取り上げ，プログラム化できるようにアルゴリズムを作成し，その利害得失を検討してみた。以下にその手法の概要を紹介する。

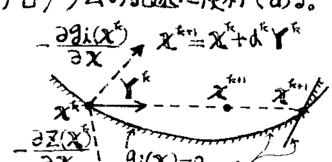
1）制約条件つき最急勾配法　　最急勾配法は目的関数の最急勾配方向（最小化問題なので負の勾配ベクトル方向，$-\frac{\partial Z(x^k)}{\partial x}$）に探索を行なう。若し$x^k$が制約式に抵触して（$g_i(x^k)>0$）いれば，制約面の負の法線ベクトル方向，$-\frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x}$のK倍のベクトルを加え制約領域内に入る。解は制約面に殆ど直交するような形で反復を繰り返しながら制約式に沿って最適解へ近づく。設計変数をスケーリングして各変数の大きさを揃えると，制約面に対しかなり傾いてきて収束が早くなる。なお偏微分係数の計算式を $dA_w=x_2dx_1+x_1dx_2$ のように全微分の形に記述し，偏微分を求めたい$x_i$のみ$dx_i=1$とし，他は$dx=0$として計算するようにしておくとプログラムの記述に便利である。




2）許容方向法　　許容方向法は制約領域内の点$x^k$から制約式を侵害せずかつ目的関数が改善される方向（有効許容方向）へ探索を繰り返す。最適解に到達したかどうかは，最適解が制約式上にあれば，その点では"有効許容方向は存在しない"。制約式から離れた点の場合は，"$x^{k+1}-x^k<\varepsilon_x$ かつ $Z(x^{k+1})-Z(x^k)<\varepsilon_z$"により判定できる。探索の途中での解は常に許容解となっている。$g_i(x^k)=0$となる（但し$x^k$は制約領域内の点）制約式を$x^k$に関して活性な制約式と言う。最急勾配法に比べ反復回数が少ないが，有効許容方向ベクトル$Y^k$を求めるときの計算量は多い。許容方向法の考え方は設計での最適解の探索を考えるときに役立つことが多い。




- 有効許容方向ベクトル$Y^k$を求めるのを線形計画法で解くのがZoutendijkの許容方向法である
- $Y^k$をLagrange未定乗数法で求めるのがRosenの勾配射影法である
- $Y^k$の延長線上で$\alpha$，$Z(\alpha)$について1次元探索を行ない$x^{k+1}$を求める
- $x^{k+1}$が制約式上にあるときは2分法により$x^{k+1}$と$i_a$（活性な制約式の番号）を求める

# 3. 2次元モデルでの計算例

2.で述べたアルゴリズムによる解の動き方をみるため，腹板だけからなる桁を想定した。図に表わせるように

2次元モデルとしたが，プレートガーダーの場合でも似たような動き方をするものと思われる。

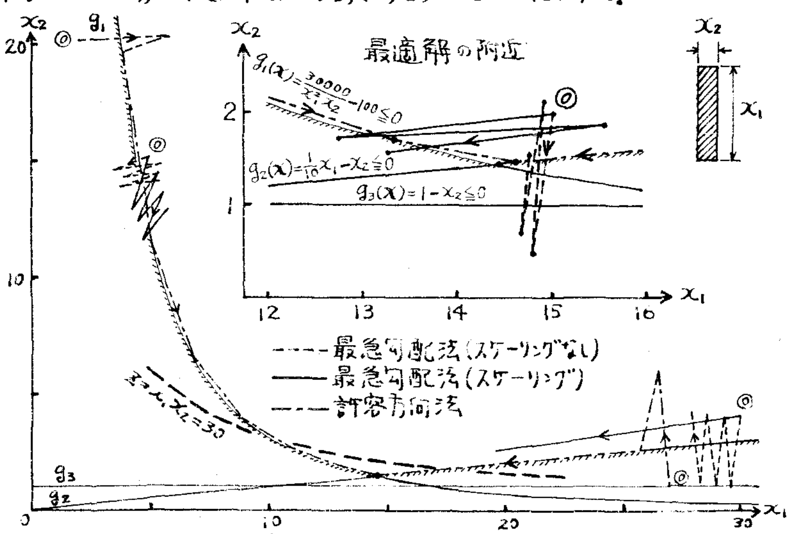
断面積 → 最小を

応力度 $\frac{M}{\frac{x_1^2 x_2}{6}} - \sigma_a \leq 0$ ……$g_1$

最大幅厚比 $\frac{1}{10}x_1 - x_2 \leq 0$ …$g_2$

最小板厚 $1 - x_2 \leq 0$ ……$g_3$

の制約条件を仮定して計算してみた。図に示すように，最急勾配法はアルゴリズムは簡単であるが反復回数は多い。設計変数のスケーリングを行なうとかなり改善されてくる。許容方向法は1回ごとの計算量は多いが反復回数は少ない。特に線形制約式上では効率がよい。




# 4. プレートガーダーの断面決定における最適解の探索

上記のアルゴリズムをプレートガーダーの設計に応用してみる。最適解（最適断面）の探索は下記の最小化問題を解けばよいが，プレートガーダーは6変数なので，6次元空間の中で最適解を探索することになる。許容方向法をそのまま用いるよりも，問題に合わせたアルゴリズムを工夫した方が計算量が少なくて済む。

目的関数 $Z = h_w \cdot t_w + b_c \cdot t_c + b_t \cdot t_t$ → 最小

制約条件 $\sigma_c - \sigma_{ca} \leq 0$, $\sigma_t - \sigma_{ta} \leq 0$ （応力度について）

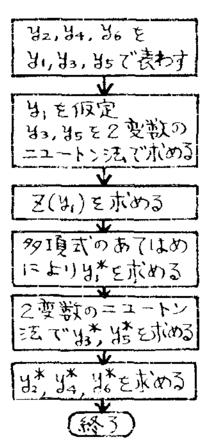
$\frac{h_w}{r_w} - t_w \leq 0$ または $t_0 - t_w \leq 0$

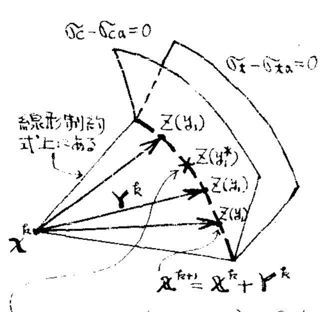
$\frac{b_c - t_w}{2r_c} - t_c \leq 0$ 〃 $t_{0c} - t_c \leq 0$ （板の形状について）

$\frac{b_t - t_w}{32} - t_t \leq 0$ 〃 $t_0 - t_t \leq 0$

1) 有効許容方向ベクトルを用いた探索では，線形制約式に沿って探索した方が効率がよい。腹板については板厚が小さいほど有利であることが知られている。フランジ断面についても同様のことが成立するかどうかを調べるため，上下フランジ断面積を一定として $\frac{\partial\sigma_c}{\partial t_c}$, $\frac{\partial\sigma_t}{\partial t_c}$, $\frac{\partial\sigma_c}{\partial t_t}$, $\frac{\partial\sigma_t}{\partial t_t}$ を求めてみると，通常のプレートガーダーの断面では，$\frac{\partial\sigma_c}{\partial t_c}+\frac{\partial\sigma_t}{\partial t_c}$, $\frac{\partial\sigma_c}{\partial t_t}+\frac{\partial\sigma_t}{\partial t_t}$ の値は正となっている。これは同じ断面積なら板厚が小さいほど有利であることを示している。故に最適解は線形制約式上にある。2) 許容応力度の限度一杯になるよう断面を定めていることからして，最適解は応力度についての2個の非線形制約式上にあることは明らかである。3) 6個の設計変数に対し，5個の等号制約条件があるので，最終的には6−5＝1次元の探索になる。4) 非線形制約式上で有効許容方向を定めて最適解を探索していくのは，あまり効率的でないので，図に示すようなアルゴリズムを考えた。

以上はプレートガーダー断面の最適化問題に合わせた最適解探索方法の一つを示した。




3組のデータ（$y_1$, $Z(y_1)$）を2次の多項式にあてはめ，Zの値が最小となる $y_1^*$ を求める

# 5. おわりに

制約条件つき最急勾配法と許容方向法について検討してみたが，両者共数値計算的にみて問題点があると思われる。実用プログラムとして用いる場合には工夫が必要である。一般に単純なアルゴリズムは反復回数が多く，精巧なアルゴリズムはプログラムが複雑になるので，問題に応じて両者の使い分けが必要である。問題を限定するとより効率のよいアルゴリズムが作れる。

『参考文献：志水清孝　システム最適化理論　コロナ社』