I－5　　頭部に質量をもつ杭の地盤変位入力による地震応答

建設省土木研究所　正員　○萩原良二
建設省土木研究所　正員　栗林栄一
建設省土木研究所　正員　川島一彦

1. まえがき

基礎杭の地震応答を解析的に導き出すためには、上載構造物および周辺地盤から伝達される力の影響を適切なモデルに置き換える必要がある。本報告では、前者の影響をモデル化する初歩的段階として、頭部に質量をもつ杭を想定し、後者については地盤の変位量と地盤反力を反力係数で関連づけて考え、応答量を算定するための理論式を誘導した。

2. 条件の仮定（図－1）

(1) 地盤を表層地盤と基盤にモデル化し、表層地盤は深さ方向に均質なものとする。

(2) 杭は、頭部に質量をもった地中部のみの一様断面のものを想定し、弾性基礎上の梁として取扱えるものとする。また、杭は基盤面まで根入れされているものとし、杭下端が自由端（せん断力＝0、曲げモーメント＝0）の場合と、固定端（たわみ＝0、たわみ角＝0）の場合を考える。

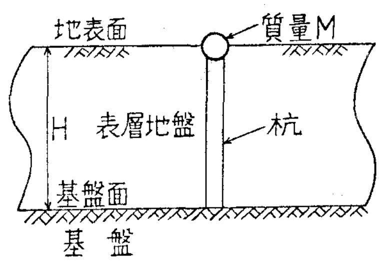

図-1 地盤および杭のモデル

3. 表層地盤の変位

座標軸は図－2のようにとるものとする。ここで使用する記号は以下のとおりである。

u：表層地盤の変位　　γ_s：土の単位体積重量
G_s：表層地盤のせん断弾性係数　　c_s：表層地盤の粘性減衰係数
V_s：表層地盤のせん断弾性波速度　　$V_s=\sqrt{gG_s/\gamma_s}$
ω：表層地盤の固有円振動数　　T_s：表層地盤の固有周期
z_B：基盤における地震動の変位　　g：重力の加速度

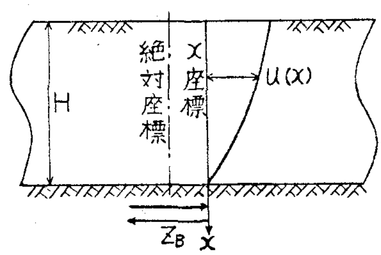

図-2 絶対座標とx座標

地盤の自由振動の方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\gamma_s}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-G_s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (1)$$

$u=X(x)e^{i\omega t}$ とおいて、$x=0$ でせん断力＝0、$x=H$ で変位＝0という境界条件から、振動数方程式、固有円振動数および固有周期を求めると次のようになる。

$$\cos\left(\frac{\omega H}{V_s}\right)=0,\quad \omega_i=\frac{(2i-1)\pi V_s}{2H},\quad T_{si}=\frac{2\pi}{\omega_i}=\frac{4H}{(2i-1)V_s}\quad (i=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad (2)$$

正規函数は、任意定数を1とおくと次のようになる。

$$X_i(x)=\cos\left(\frac{2i-1}{2H}\pi x\right)\quad (i=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad (3)$$

次に基盤に地震動（加速度 $\ddot{z}_B$）が与えられたとき、$u=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(t)X_i(x)$ とおくと次式が導かれる。

$$\ddot{\xi}_i+\frac{g}{\gamma_s}c_s\dot{\xi}_i+\frac{gG_s}{\gamma_s}\left\{\left(\frac{2i-1}{2H}\right)\pi\right\}^2\xi_i=-\frac{(-1)^{i-1}\cdot 4}{(2i-1)\pi}\ddot{z}_B \qquad (4)$$

(4)式から、

$$\xi_i(t)=\frac{1}{\omega_{di}}\int_0^t P_i(\tau)e^{-\eta_i(t-\tau)}\sin\omega_{di}(t-\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

ここで、$2\eta_i=\frac{g}{\gamma_s}c_s$,　$\omega_{di}=\sqrt{\omega_i^2-\eta_i^2}$,　$P_i(\tau)=-\frac{(-1)^{i-1}\cdot 4}{(2i-1)\pi}\ddot{z}_B$　$(i=1,2,3,\cdots\cdots)$　(6)

以上より、基盤に地震動（加速度 $\ddot{z}_B$）が与えられたときの表層地盤の変位、$u=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(t)X_i(x)$ が求められる。

4. 頭部に質量をもつ杭の自由振動

座標軸は図－３、図－４のようにとるものとし、杭下端は自由端と固定端の２つの場合を考える。ここで新たに使用する記号は以下のとおりである。

m：杭の単位長さ当りの質量　　　M：杭頭部の質量

EI：杭の曲げ剛性　　　k：地盤反力係数

ν：固有円振動数　　　T：固有周期

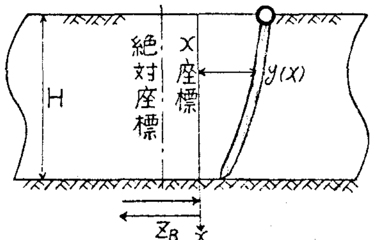

図-3 杭下端が自由端の場合の座標

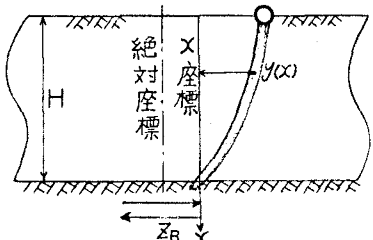

図-4 杭下端が固定端の場合の座標

杭の自由振動の方程式は、次式で表わされる。

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + k y = 0 \qquad (7)$$

$y = Y(x)e^{i\nu t}$ とおくと、

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + 4\alpha^4 Y = 0, \qquad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k - m\nu^2}{4EI}} \qquad (8)$$

この微分方程式の一般解は次式で表わされる

$$Y(x) = (A\sin\alpha x + B\cos\alpha x)\sinh\alpha x + (C\sin\alpha x + D\cos\alpha x)\cosh\alpha x \qquad (9)$$

(1) 杭下端が自由端の場合

境界条件：
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ で、} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad -EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\left(-M\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = M\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ x = H \text{ で、} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

振動数方程式；
$$2mEI\alpha^3(2C_1^2 + C_3^2 - C_2^2) = M(k - 4EI\alpha^4)(C_1C_2 + C_1C_3 + C_3C_4 - C_2C_4) \qquad (11)$$

正規函数；
$$Y(x) = \frac{C_k}{C_1^2 + C_3^2 + C_2C_3 - C_1C_4}\{(C_1^2 + C_3^2 + C_2C_3 - C_1C_4)\cos\alpha x\sinh\alpha x + (C_2^2 + C_2C_3 - C_1^2 - C_1C_4)\sin\alpha x\cosh\alpha x + (C_2C_4 - C_1C_2 - C_1C_3 - C_3C_4)\cos\alpha x\cosh\alpha x\} \qquad (12)$$

(2) 杭下端が固定端の場合

境界条件：
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ で、} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad -EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\left(-M\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = M\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ x = H \text{ で、} y = 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

振動数方程式；
$$2mEI\alpha^3(2C_4^2 + C_2^2 - C_3^2) = M(k - 4EI\alpha^4)(C_1C_2 + C_1C_3 + C_3C_4 - C_2C_4) \qquad (14)$$

正規函数；
$$Y(x) = \frac{C_k'}{C_2^2 + C_4^2 + C_1C_4 - C_2C_3}\{(C_2^2 + C_4^2 + C_1C_4 - C_2C_3)\cos\alpha x\sinh\alpha x + (C_3^2 + C_1C_4 - C_4^2 - C_2C_3)\sin\alpha x\cosh\alpha x + (C_2C_4 - C_1C_2 - C_1C_3 - C_3C_4)\cos\alpha x\cosh\alpha x\} \qquad (15)$$

ここで、C_k, C_k' は任意定数, $C_1 = \sin\alpha H\sinh\alpha H$, $C_2 = \sin\alpha H\cosh\alpha H$, $C_3 = \cos\alpha H\sinh\alpha H$, $C_4 = \cos\alpha H\cosh\alpha H$ (16)

固有円振動数および固有周期は、振動数方程式から求められる α_i $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を用いると次式により求められる。

$$\nu_i = 2\sqrt{(k - 4EI\alpha_i^4)/m}, \qquad T_i = 2\pi/\nu_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \qquad (17)$$

5. 頭部に質量をもつ杭の地盤変位入力による地震応答

ここで新たに使用する記号は以下のとおりである。

C_m：杭の粘性減衰係数　　　C_M：杭頭部の粘性減衰係数

基盤に地震動（加速度 $\ddot{z}_B$）が与えられた場合の杭の変位を、$y = \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(t)Y_i(x)$ とおくと次式が導かれる。

$$\ddot{\phi}_i + \frac{C_m\int_0^l Y_i^2 dx + C_M[Y_i^2]_{x=0}}{m\int_0^l Y_i^2 dx + M[Y_i^2]_{x=0}}\dot{\phi}_i + \frac{EI\int_0^l\left(\frac{d^2 Y_i}{dx^2}\right)^2 dx + k\int_0^l Y_i^2 dx}{m\int_0^l Y_i^2 dx + M[Y_i^2]_{x=0}}\phi_i = \frac{-m\int_0^l Y_i dx - M[Y_i]_{x=0}}{m\int_0^l Y_i^2 dx + M[Y_i^2]_{x=0}}\ddot{z}_B + \frac{k\int_0^l u Y_i dx}{m\int_0^l Y_i^2 dx + M[Y_i^2]_{x=0}} \qquad (18)$$

(18)式の右辺 $= Q_i(\tau)$ とおくと、
$$\phi_i(t) = \frac{1}{\nu_{di}}\int_0^t Q_i(\tau)e^{-\zeta_i(t-\tau)}\sin\nu_{di}(t-\tau)d\tau \qquad (19)$$

ここで、$2\zeta_i = \{C_m\int_0^l Y_i^2 dx + C_M[Y_i^2]_{x=0}\}/\{m\int_0^l Y_i^2 dx + M[Y_i^2]_{x=0}\}$, $\nu_{di} = \sqrt{\nu_i^2 - \zeta_i^2}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ (20)

以上より、基盤に地震動（加速度 $\ddot{z}_B$）が与えられたときの杭の変位、$y = \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(t)Y_i(x)$ が求められる。

参考文献 (1) 大川、矢島、山寄：自由長のある杭の固有振動数について、第32回土木学会年次学術講演会講演概要集Ⅰ-238

(2) 栗林、川島、宮田：地震時における地盤の変形を考慮した基礎杭の応力算定法、土木研究所資料 第972号

(3) 猪瀬、高田、橋脚の耐震性に関する研究 (1)、土木研究所報告第81号の8