II－18　　MEM法による地下水位変動スペクトルの二・三の解析

埼玉大学　工学部　正員　佐藤邦明
〃　〃　〃　○渡辺邦夫

はじめに

スペクトル推定の一手法であるMEM（Maximum Entropy Method）は1967年にBurgが提唱して以来，その性質について種々の議論がなされ，また特に地球物理学の分野（地震波・地磁気変動の解析）でその応用が試みられている。それらの研究の結果，MEMは①スペクトルの推定に，従来の方法のようにWindowを使用せず，分解能が高い，②短いデータからもかなり良いスペクトルの推定がなしうるという良好な性質が明らかにされている。しかし，実際の時系列にMEMを適用する場合，非定常成分の除去，あるいはフィルターの長さなど種々の問題が残っている。今回，筆者らはMEMにより地下水位・地盤変動という非定常性の強い時系列のスペクトル分析を行い，その性質を吟味した。

1　MEMの理論

MEMの理論については，既に多くの研究がなされているが[1),2)]，その理論式は与えられた読み取り間隔Δtの時系列が，ガウス確率分布に従がうと仮定した時の情報エントロピーを，自己共分散関数$\Phi(m)$

$$\Phi(m)=\int_{-f_N}^{f_N}P(f)\,e^{i2\pi mf\Delta t}\,df\ ,\qquad(-M\leq m\leq M)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

の条件下で最大にすることにより導かれ，次式となる。

$$P(f)=\frac{P_M}{2f_N}\left|1+\sum_{m=1}^{M}a_m e^{-i2\pi mf\Delta t}\right|^{-2}\quad\cdots\cdots(2)\ ,\quad\begin{bmatrix}\Phi(0) & \Phi(1) & \cdots & \Phi(M)\\ \Phi(1) & \Phi(0) & \cdots & \Phi(M-1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Phi(M) & \cdots & \Phi(1) & \Phi(0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ \vdots\\ a_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_M\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(3)$$

ここで，$P(f)$はスペクトル密度関数，f_Nはナイキスト周波数（$f_N=1/2\Delta t$），Mは自己共分散関数の与えられる範囲を示す。また，$(a_1,a_2,\cdots,a_M)$は予測誤差フィルター，P_Mは予測誤差の分散である。

スペクトル計算に際して，まず$(a_1,a_2,\cdots,a_M)$及びP_Mを求めねばならないが，この値は$(\Phi(0),\Phi(1)\cdots\Phi(M))$を計算することによって(3)式から求めることができる。しかしBurgは，まず$P(0)$を

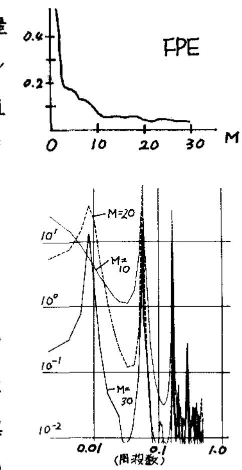
$$P(0)=\Phi(0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\quad(x_i\text{は時系列の値})\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

より求め，次にa_1を正逆両方向に作用するフィルターと考え，正逆両方向の予測誤差の二乗平均の和P_1を最小にするよう選び，次にa_2,P_2を決め，更に$a_3,P_3,\cdots,a_M,P_M$を順次求めるという漸化的なBurgアルゴリズムを提唱した。この方法によれば，$(\Phi(1),\Phi(2)\cdots\Phi(M))$を求めなくとも良い。（今回の研究ではこの方法を使った。）一方，このような理論ではなく，自己回帰過程の研究から，時系列が自己回帰過程に従がうと仮定して(2)，(3)式と同等な形の式を別に導くことができる。このことは，MEMが実際の時系列を自己回帰過程して解析する手法とみなしうる。従って，この仮定がどの程度妥当であるか，更に，何次（上述のフィルターの数M）の自己回帰過程と考えるかが，MEMを適用する場合の問題点になるといえる。

2　計算結果と考察

地下水位変動は一般に，長期傾向成分，周期成分，ランダム成分の3成分に分けて考えることができる。ここで，周期成分は，季節変動による一年周期，地下水取水に伴う一週間，一日周期，あるいは地殻潮汐・天文潮など地球物理的な要因による周期など種々の成分を含んでいることが考えられる。このような複雑な成分を持つ時系列であっても，データ数Nが大きければ，長期傾向成分を除去することにより，各周期成分を分離することは

可能であろう。しかし，実際にはデータ数は限られており，短いデータでなるべく正確な周波数分析が必要となる。このような短い時系列では，従来の手法では一般にフィルターをかけることによって長周期成分を除去して解析が行なわれるが，長周期成分の適正な除去は難しい。しかし，MEMが短いデータでも十分高い分解能を持てば，この作業をある程度はぶくことができると考えられる。このことを検討するため，まず，種々の周期を持つ正弦波とランダム量により合成したデータ（図－１の下に示す）にMEMを適用した結果が図－１である。図－１(a)は，フィルターの長さ（(2)式のM）の妥当な長さを与えるため，赤池氏提唱のFPE（Final Prediction Error）を計算したものである。Mの値はFPEの最小値を与えるものが良いが，図からFPEはM＝10 前後までは急速に低下するが，その後ほとんど変っていないことがわかる。従って，図－1(b)には，M＝10,20,30の場合のスペクトル推定を示した。M＝10では最長の周期成分は分解していないが，M=20,30の場合は，N＝80（最長周期の2/3）と短いデータでもかなり明瞭なピークを示している。

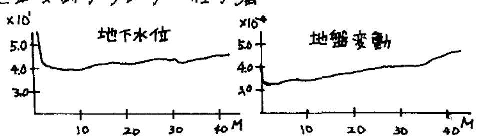


図－１　合成データのFPEとスペクトル

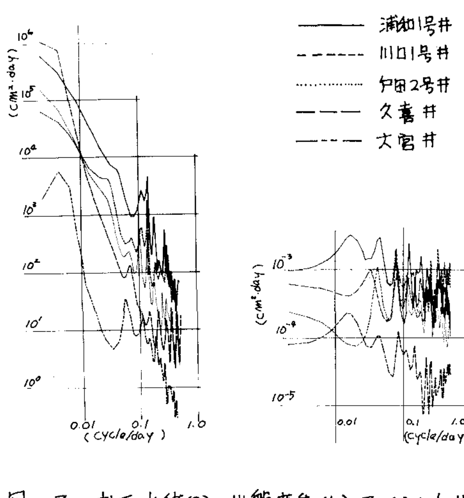
$\sin(2\pi/3\cdot T)+\sin(2\pi/8\cdot t)+\sin(2\pi/120\cdot T)$＋ランダム量 (−0.25〜0.25)

$T=1,N$,　$N=80$

このような結果を考慮して，埼玉県下の地下水位・地盤変動スペクトル分析を行った（日平均データ使用，N＝180）。図－２は一例として戸田２号井の地下水位・地盤変動のFPE を示したものである。この図から，地下水位変動ではMが増加すると共に最初低下し，その後漸増していることがわかる。これに比べて，地盤変動ではFPEはほとんど低下せず，Mと共に徐々に増，減している。これは，地盤変動がランダム性が強いという理由によると考えられる。FPEを考慮して，図－３にM＝30 の場合のスペクトル分析結果を示した。図－３より，地下水位変動では長周期成分と短周期成分がかなり良く分離され，また短周期成分のスペクトル密度分布は，以前筆者らが報告した3) 31 日移動平均により長周期成分を除去した，ほぼ一年間のデータからBlackman-Tukey 法により分析したものとほぼ同じであった。この結果，地下水位変動の分析にはこの程度の長さのデータでも十分使いうるという結論を得た。しかし，一方地盤変動ではこの図からも，FPEの傾向に見られると同様にかなりのランダム性を示している。このようなランダム性の強い時系列の場合に，MEMが他の方法に比べて有利であるかどうかは今後の課題であろう。しかし，今回の研究の結果，種々の周期成分を含んでいると考えられる地下水位変動の分析には，MEMがかなり有効な手法であることが明らかになったと考える。今後は更に，NやMを変えて分析を行ない，この手法の適切な使用について検討を加えたい。



図－２　戸田２号井のFPE



図－３　地下水位(a)・地盤変動(b) スペクトル

参考文献

1) Chen W.Y et al., Experiments with Maximum Entropy Power Spectra of Sinusoids , J.Geophys. Res., 79, 3019−3022 , 1974

2) 大内徹・南雲昭三郎, Maximum Entropy Methodの地震波解析への応用，震研彙報 , 50, 359 -384 , 1975

3) 埼玉県環境部・埼玉大学工学部地盤水理実験施設 , 昭和50年度 地盤沈下・地下水位観測成果および研究年報 , 1976