

1. 問題の所在

斜張橋、吊屋根、控え索付マストなどは斜め方向に張られたケーブルが重要な部材である。直線部材として扱われるこれらのケーブルは、その長さが短い場合はケーブル自体のヤング係数にもとづいて部材としての剛性を評価してよいが、ケーブル長が大になると、たとえプレストレスを加えても自重によるサグは無視しえず、ケーブル張力による梁あるいは柱の二次曲げと相まって構造物の挙動も非線形性を呈するようになる⁽¹⁾⁽²⁾。この種非線形挙動の厳密な解析は構造物全体に対する有限変位解析によることになるが、予備的検討などの目的には、サグの影響を考慮したケーブルの換算ヤング係数をしておくことも有意義である。このようなサグの影響によるケーブルのヤング係数の低下を初めて定式化したのは Ernst (1965)⁽³⁾で、現在ヨーロッパではその結果を用いているものが多い。別に Tang (1971)⁽⁴⁾も同様な結果を得ている。しかしこれらの結果の論拠については前田らの異議を唱えており、ここでは従来の諸理論を比較しうえて新たな定式化を試みる。

2. 前提条件および基本式

自由に吊られたケーブルの形状は本来カタナリーであるが、サグ比 $n = f/l$ が小さい場合は、近似的に計算上扱いやすい放物線とみなして差しつかえなく、既往の研究もすべてこれによっている。

図示の記号を用いて、以後の展開に必要な諸関係、式をまず提示しておく。

1) ケーブル形状

$$y \doteq (\tan \alpha + 4n)x - \frac{4n}{l}x^2 \quad (1)$$

2) ケーブル長

$$S \doteq l \left(\sec \alpha + \frac{8n^2}{3 \sec^3 \alpha} \right) \quad (2)$$

3) ケーブル張力および支点反力

$$H \doteq \frac{wl}{8n \cos \alpha} = \frac{wL}{8n} \quad (3)$$

$$N_A = H \frac{\cos(\alpha - \varphi_A)}{\cos \varphi_A}, \quad N_B = H \frac{\cos(\varphi_B - \alpha)}{\cos \varphi_B} \quad (4)$$

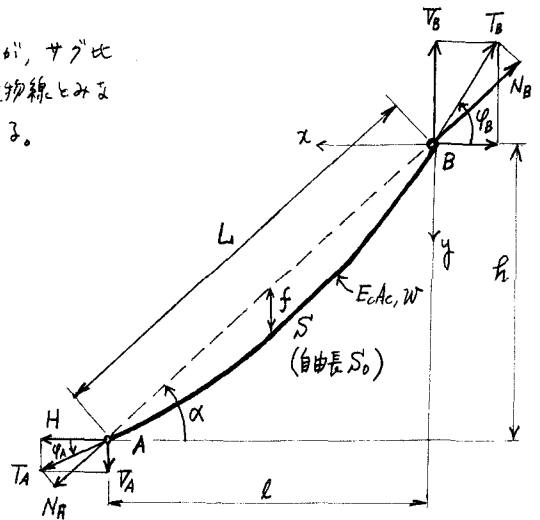
$$T_A = H \sqrt{1 + (\tan \alpha - 4n)^2}, \quad T_B = H \sqrt{1 + (\tan \alpha + 4n)^2} (= T_{\max}) \quad (5)$$

4) ケーブルの弾性伸び (w : ケーブル全重量とする)

$$\Delta S = \int_0^l \frac{H}{E_c A_c} \sec^3 \alpha dx = \frac{wl}{8n E_c A_c} \left(\sec^3 \alpha + \frac{16}{3} n^2 \right) = S - S_0 \quad (6)$$

3. 既往の研究

Ernst⁽³⁾はケーブルの形状変化にもとづく見かけのヤング係数を L 方向の伸びに $N = H \sec \alpha$ で微分するることによって求め、これをケーブル自体のヤング係数 E_c と合成して、次の式(7)の結果を導いているが、ここには力と変形の方法のとり方に混乱が見られ、式(7)は実は縦がめざした部材軸方向の剛性ではなく、前田・林⁽⁵⁾



の指摘するように接線剛性に対応する。

$$E_L = \frac{E_c}{1 + \frac{W^2 L^2}{12 N^3} E_c A_c} = \frac{E_c}{1 + \frac{W^2 \cos^5 \alpha}{12 H^3} E_c A_c} \quad (7)$$

Tang³⁾は別にHの変化によるケーブルの伸びと弦長の軸方向変形からケーブルの見かけのヤング係数を導いているが、やはり $N = H \sec \alpha$ としているので、式(7)とまったく同じ結果を得ている。

式(6)のケーブル方程式から見かけのケーブル弾性係数を求めることは Chu/Ma ⁴⁾が試みているが、繰返し計算による数値解析によろざろ得ず、閉じた形での実用式は与えられていない。同様に前田・林^{5), 6)}はケーブル方程式から一般的な接線剛性マトリックスを誘導した。

4. 弦長方向の伸び剛性—部材軸方向の換算ヤング係数

ここで求めようとするのは部材軸方向(N方向)の伸び剛性である。水平なケーブル($\alpha=0$)の場合はNとHの方向は一致するので、ケーブル方程式から $E_L = (\Delta H / \Delta L) (L / A_c)$ で定義される見かけのヤング係数を求める。

$$E_L = \frac{1 + \frac{1}{24} \left(\frac{W}{H}\right)^2 - \frac{H}{E_c A_c} \left\{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{W}{H}\right)^2\right\}}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{W}{H}\right)^2 \left(\frac{E_c A_c}{H} - 1\right)} E_c \quad (8)$$

これに対し、式(7)で $\alpha=0$ とおくと

$$E_L = \frac{1}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{W}{H}\right)^2 \frac{E_c A_c}{H}} E_c \quad (9)$$

となり、式(8)では新たにいくつかの項が加わったのがみられる。

いずれにせよ、この場合ケーブルのヤング係数 E_c の修正係数に関連する無次元パラメータは次の二つである。ここに γ は付着物を含むケーブルの比重、 σ はケーブルの応力度である。

$$\alpha = \frac{H}{W} \div \frac{\sigma}{\gamma L}, \quad \beta = \frac{H}{E_c A_c} \div \frac{\sigma}{E_c} \quad (10)$$

橋梁のケーブル部材では $\sigma < 6 \times 10^4$ (kg/cm²) の範囲内であり、ケーブル長 L は 100m から 500m 程度の範囲を占めると $\alpha < 75$, $\beta < 3 \times 10^3$ となる。数値計算の結果では α, β 両パラメータが前田の範囲内にあるおぼろげ、式(8)と式(9)の差は意外に小さく、よほど長いケーブルが低い応力度をうける場合を除いては問題にならない。したがって軸方向の剛性を問題とするおぼろげ、前田・林⁶⁾の指摘のうち、Ernst 式の計算への使用が明らかに間違っているとか、線形解析にすぎないとかするのはいいすぎであるように思われる。

なお、ケーブルに傾斜がある場合(前ページ図示)、式(8)は次のようになる。

$$E_L = \frac{1 + \frac{1}{24} \left(\frac{W}{H}\right)^2 \cos^2 \alpha - \frac{H}{E_c A_c} \left\{ \sec \alpha + \frac{1}{12} \left(\frac{W}{H}\right)^2 \cos \alpha \right\}}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{W}{H}\right)^2 \cos^5 \alpha \left(\frac{E_c A_c}{H} - \sec^3 \alpha \right)} \quad (11)$$

“引用文献”

- 1) 前田幸雄・林正・前田研一：大阪大学工学部 Tech. Rep. No. 1183, Vol. 24, 1974.
- 2) Ito, M., Y. Imoto and M. Kamio：東京大学工学部総合試験所年報, Vol. 35, 1976.
- 3) Tang, M.-C.：Jour. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. ST5, 1971.
- 4) Chu, K.-H. and Ma, D.-C.-C.：Jour. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. ST3, 1976.
- 5) Ernst, E.J.：Die Bauingenieur, H. 2, 1965.
- 6) 前田幸雄・林正・生野幸三：土木学会関西支部年次学術講演会, BB51.