

防衛大学校土木工学教室 正員 石川 信隆

防衛大学校土木工学教室 〇正員 中村 弘

防衛大学校土木工学教室 正員 岡元 北海

1. 緒言 曲げ(M)と軸力(N)を同時に受ける平面構造物の最適塑性設計を行なうには、(i)曲げと軸力を考慮したM+N降伏条件、(2) M+N平衡条件、(3) M+N崩壊機構条件の3つの基本的条件を満足したうえで、構造物の全重量を最小にするよう各部材の塑性容量(M_pおよびN_p)を決定しなければならない。このM+Nの影響を考慮した既往の研究としては、わすかに横尾・中村¹⁾らの平面ラーメンを対象とした設計の解析的な研究があるにすぎず、これも式の誘導がやや繁雑で実用性に乏しい憾みがある。本研究は、アーチ構造への基礎的段階として軸力の影響を二次的効果²⁾と考えずに曲げと軸力を同時に考慮した直線構造物の設計を試みるものである。すなわち、まず一般に無次元化で表示されるM+Nの相関降伏条件式を設計用に次元を有するM+Nの相関降伏条件式に変換し、ついで線形計画法(LP)の双対定理を適用することにより、下界および上界定理に基づく簡潔な設計の基本式を誘導し、もって比較的大規模な平面ラーメン構造物に適用できる実用的な最適塑性設計法を確立したものである。なお、設計に当っては次のような仮定を用いた。(i)荷重は単調比例増加荷重とする。(ii)各部材の断面高さ(2d)または断面高さ・スパン比(2d/L)が与えられるものとする。(iii)断面は理想H型断面とする。

2. 設計のための基本的条件と目的関数 2.1 基本的条件

(1) **M+N降伏条件** いま図-1のような理想H型断面に対するM+N相関降伏条件を求めれば、次のような無次元の形で表わされる。

$$C_{1k} m + C_{3k} n = 1 \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad \cdots (1)$$

ただし、 $m = M/M_p$, $n = N/N_p$, $C_{11} = C_{12} = 1$, $C_{13} = C_{14} = -1$, $C_{31} = C_{34}$

$= 1$, $C_{32} = C_{33} = -1$, $M_p = \sigma_y A d$, $N_p = \sigma_y A$, A = フランジの全断面積、

$d = 1/2$ 断面高さ、 σ_y = 降伏応力を示す。式(1)は、図-1のような固定化した正方形で表わされ、塑性相対速度 v は降伏曲線の法線方向に生じ、勾配 $\theta/\chi = 45^\circ$ の角度をもつ。(ただし、 $\chi = N_p d / M_p$, θ = 塑性相対回転角、 Δ = 塑性相対変位である。)しかし、設計においては全塑性モーメント M_p および降伏軸力 N_p が未知数なるゆえ、次元をもつ降伏条件式に変換する必要がある。すなわち、 $C_{1k} M_j + C_{3k} g_{\ell} N_{\ell} - M_{ph} \leq 0$ ($j=1, 2, \dots, S$; $k=1, 2, 3, 4$; $\ell \leq j$) $\cdots (2)$

ただし、 M_{ph} = 設計全塑性モーメント、 g_{ℓ} = 設計変数を示す記号、 $g_{\ell} = M_{pj} / N_{p\ell}$ ($= -1$ である)。式(2)は、図-2のように移動可能な菱形のM+N相関降伏曲線を示し、塑性相対速度 v は勾配 $\theta_j / \Delta_{\ell} = N_{p\ell} / M_{pj} = 1/d$ をもつ。

(2) **M+N崩壊機構条件**³⁾ ある任意のM+N崩壊機構における仮想節点回転角 θ_j および仮想部材変位 Δ_{ℓ} はそれぞれM基本機構およびM+N基本機構の仮想回転角 θ_{ij} および仮想部材変位 $\Delta_{i\ell}$ の1次結合によって表わされ、次のようなM+N崩壊機構条件式となる。

$$\theta_j = \sum_{i=1}^m x_i \theta_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, S) \quad \cdots (3a);$$

$$\Delta_{\ell} = \sum_{i=m+1}^{m+b} x_i \Delta_{i\ell} \quad (\ell=1, 2, \dots, b) \quad \cdots (3b)$$

ここに、 $x_i = M$ およびM+N基本機構 i が奥の崩壊機構に関する割合を示す係数、 $m = M$ 基本機構の全数($= S - r$)、 r = 構造物の不静定次数、 S = 全部変数、 b = 全部変数($= M+N$ 基本機構の全数)である。(3) **M+N平衡条件** 塑性崩壊における力の平衡条件式は、独立なM基本機構およびM+N基本機構に対して仮想仕事の原理を適用することによりそれぞれ次のようにえられる。

$$\sum_{j=1}^S M_j \theta_{ij} = \lambda e_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \cdots (4a); \quad \sum_{j=1}^S M_j \theta_{ij} + N_{\ell} \Delta_{i\ell} = \lambda e_i \quad (i=m+\ell; \ell=1, 2, \dots, b)$$

$\cdots (4b)$ ただし、 e_i = 基本機構における作用荷重による仮想外力仕事、 λ = 終局荷重係数である。

2.2 目的関数 単位長さ当りの重量(Z)が塑性容量(M_pおよびN_p)に比例するものと仮定すれば、

$$Z = \alpha M_p + \beta N_p \quad \cdots (5) \quad \text{ただし、}\alpha, \beta \text{ はある定数。}\quad (\text{さらに仮定(iii)より } N_p/M_p = 1/d = \text{一定であるから、})$$

式(5)は次のようになる。

$$Z = (\alpha + \beta \cdot N_p/M_p) M_p = \gamma M_p \quad \cdots (6) \quad \text{ただし、}\gamma = \alpha + \beta \cdot N_p/M_p = \text{一定である。}$$

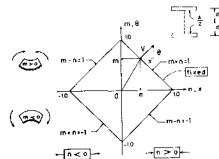


図-1

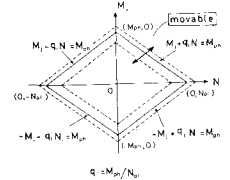


図-2

よって、目的関数は式(6)を構造物全体にわたって総和し、変数項のみを考えれば次式のように表示される。

$$Z = \sum_{k=1}^n M_{pk} L_k \quad \text{----- (7)} \quad \text{ただし、} n = \text{設計変数の全数、} L_k = M_{pk} \text{が一応ある間の部材長である。}$$

3. 設計の基本式 3.1 上界定理による基本式 塑性設計の上界定理によれば、『平衡条件と降伏条件を満足する(静的許容応力状態の)設計は、最小重量設計の上界を与える』ことになるから、式(7)、(4)、(2)を用いて次のような上界定理による基本式がえられる。

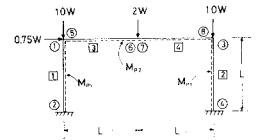
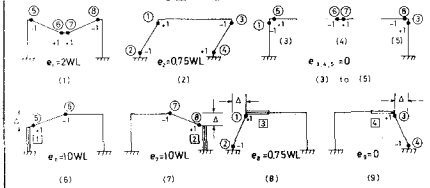


図-3



未知数: $M_{pk} (k=1, 2, \dots, m)$; $M_j (j=1, 2, \dots, S)$; $N_{\ell} (\ell=1, 2, \dots, b)$
 目的関数: $Z = \sum_{k=1}^n M_{pk} L_k \rightarrow \min. \quad \text{----- (8a)}$
 制約条件: $\sum_{j=1}^S M_j \theta_{ij} = \lambda e_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \text{----- (8b)}$
 $\sum_{j=1}^S M_j \theta_{ij} + N_{\ell} \Delta_{i\ell} = \lambda e_i \quad (i=m+1; \ell=1, 2, \dots, b) \quad \text{----- (8c)}$
 $C_{1k} M_j + C_{3k} g_{\ell} N_{\ell} - M_{pk} \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} j = S_k + 1, \dots, S_k \\ k = 1, 2, \dots, n \\ \ell = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right. \quad \text{----- (8d)}$

ただし、 S_k は設計変数 M_{pk} に対応する節点番号のうち最大節点番号。

式(8)の変数の数は、 $S+b+n$ 、制約条件式の数は $m+b+4S$ となる。

3.2 下界定理による基本式 LPにおける双対定理を用いて、式(8)の裏(Dual)を求めれば下界定理に基づく設計の基本式が次のようになる。

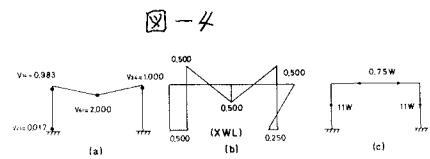


図-4

未知数: $v_{jk} (j=1, 2, \dots, S; k=1, 2, 3, 4)$; $t_i (i=1, 2, \dots, m+b)$
 目的関数: $\psi = \sum_{i=1}^{m+b} t_i e_i \rightarrow \max. \quad \text{----- (9a)}$
 制約条件: $\sum_{k=1}^4 C_{1k} v_{jk} - \sum_{i=1}^m t_i \theta_{ij} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, S) \quad \text{----- (9b)}$
 $\sum_{k=1}^4 C_{3k} g_{\ell} v_{jk} - \sum_{i=m+1}^{m+b} t_i \Delta_{i\ell} = 0 \quad (\ell=1, 2, \dots, b) \quad \text{----- (9c)}$
 $\sum_{j=S_k+1}^{S_k} \sum_{k=1}^4 v_{jk} \leq \beta L_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \text{----- (9d)}$

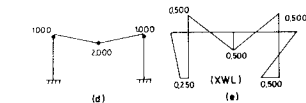


図-5

ここに、式(9a)は崩壊機構における外力仕事が最大になることを示し、式(9b)、(9c)はそれぞれ式(3a)、(3b)に等しく崩壊機構における回転角と変位の適合条件を、また式(9d)は $M+N$ の Foulkes 機構が形成される条件を意味している。ただし、 $v_{jk} = M+N$ 崩壊機構における節点 j の相対速度を示し図-2の降伏曲線の外向き法線ベクトルで表わされ、 $v_{jk} = \theta_j$ または $\Delta_{\ell}/g_{\ell} (= N_p \Delta_{\ell}/M_p)$ を示す; β = 正の比例定数。ここで、式(9)の変数の数は、 $4S+m+b$ 、制約条件式の数は $S+b+n$ であり、式(8)と式(9)は互いに双対性が成立しているゆえ $M+N$ の設計においても唯一性定理が成り立ち、 $\min. Z = \max. \psi$ となる。また、式(8)の裏(Dual)の解は式(9)の表(Primal)の解 v_{jk} 、 t_i に一致し、さらに式(9)の裏の解は式(8)の表の解 M_j 、 N_{ℓ} 、 M_{pk} に一致する。

4. 数値計算例

図-3のような大きな軸力を受けるラーメン(ただし、 $\lambda=1.0$ 、 $N_p L/M_p = L/d = 1/20$)を図-4のような M および $M+N$ 基本機構を用いて設計すれば、表-1のような結果がえられこのときの $M+N$ の Foulkes 機構および M 、 N -分布がそれぞれ図-5の(a)、(b)、(c)のようにえられる。また、曲げのみを考慮した設計を別途行えば、表-1の設計値およびそのときの M のみの Foulkes 機構と M -分布が図-5の(d)、(e)のようになる。

5. 結言 本法は従来の方法²⁾のように繰返す必要がなく、たった1回のLPの適用でかなり大規模な平面ラーメンの設計が可能となる矣、またアーチ構造へも容易に拡張可能である矣、さらに死荷重をも考慮した設計にも応用でき極めて有用であると思われる。

参考文献 1) Y. Yokoo, T. Nakamura, M. Keii, "The Minimum Weight Design of Multi-Story Building Frames Based upon the Axial Force-Bending Moment Interaction Yield Condition," Optimization in Structural Design, IUTAM Symposium, Warsaw, 1973.

2) 石川, 中村, 岡元, "二次的影響を考慮した骨組構造物の最適塑性設計", 第3回関東支部年次研究発表会講演概要集, 昭和51年1月。3) M. Z. Cohn, T. Rafay, "Collapse Load Analysis of Frames Considering Axial Forces", Journal of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 100, EM 44, Aug., 1974.

表-1

Variables Design	Design Plastic Moments		Total Weight
	$M_k (KWL)$	$M_{\ell} (XWL)$	$Z (KWL^3)$
(a) $M+N$	0.592	0.506	2.196
(b) M	0.500	0.500	2.000
(c) $(a)-(b) \times 100 (\%)$	18.4	1.2	9.8