

中央大学 理工学部 正員 林 泰 造
中央大学 理工学部 学生員 〇 山 田 正

1. まえがき

非等粘性乱流は、剪断力を持つ事により等粘性乱流とは、本質的な相違がみられ剪断乱流と呼ばれる。さらに剪断乱流はその特徴により、自由乱流 (free turbulence) と壁面乱流 (wall turbulence) に二分される。水理学上に見られる wall turbulence の中には、大きく分けて次の3つの Type が存在する。

1) Pipe, closed channel. 2) flat plate boundary layer. 3) open channel.

上記3つの Type の乱流は、多くの共通の性質を有しながらも、又本質的な相違も存在している。本研究は3つの Type の乱流のうち、最も基本的で、simple な乱流構造をもつ 1) の Type の乱流を取り扱うものである。

2. 解析

取り扱う乱流場は、Fig. 1 に示す様なものである。解析に先立ち、次の3つの仮定を設ける。(i) 乱れの2次元性 (ii) 変動速度は平均流速に比べて十分小さい、云々の“弱い乱れ” (iii) 流れ方向に関して homogeneous.

仮定 (i) より基礎方程式は2次元 Navier-Stokes eq. と連続の式を用い、流速、圧力項を

(1) 式のように表す。

$$\left. \begin{aligned} u &= U(y) + u'(x, y, t) \\ v &= v'(x, y, t) \\ p &= P(x, y) + p'(x, y, t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \nabla^2 u' \quad (2) \\ & \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \nabla^2 v' \quad (3) \\ & \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

次に仮定 (ii) より基礎方程式と変動項に関して2次以上の項を無視する事により線型化し、(2), (3), (4) 式を得る。

(2), (3) 式から圧力の項を消去すると(5)式となる。

(5)式は渦度の変動項に関して、初流、発生、逆散の釣合

の式となつてゐる。仮定 (iii) より、変動速度 u', v'

を振幅数 α と波数 α に関する2重 Fourier 変換が定義

され (6), (7) 式を得る。(6), (7) 式を連続の式 (4) 式、

渦度の保存式 (5) 式に代入し、 v^* に関する方程式 (9) 式

を得る。又 $f/\mu = -C$ (convection vel.) を用い、

parameter を α, f の2つから、 $\alpha n + i$ を parameter

とする (10) 式を作る。

さらに (10) 式を無次元化する為、次の如き無次元量

を導入する。 $\eta = 1 - y/H$, $U = U(y)/U_{max}$,

$\alpha = \alpha H$, $Re = HU_{max}/\nu$, これらを用いると、

(10) 式は、層流の安定不安定問題 α について、従来より

よく知られた、Orr-Sommerfeld eq. (11) 式

になる。層流の安定不安定問題は rigid な境界条件のもとでの固有値問題として、取り扱われて来たが、

本研究では、well-developed turbulence を表現する式として (11) 式を用い、得られる解 u, v に関する

スペクトルを作り出し、これに対し、流れの一瞬のスペクトル形状の境界条件を与える事と当手法の特色としている。

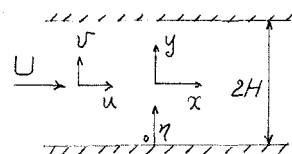


Fig. 1

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] + U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right] - \underbrace{v' \frac{dU}{dy}}_{\text{convection}} = \underbrace{\nu \nabla^2 \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right]}_{\text{dissipation}} \quad (5)$$

$$u^*(\alpha, y, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x, y, t) \exp[-i\alpha x - ift] dx dt \quad (6)$$

$$v^*(\alpha, y, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v'(x, y, t) \exp[-i\alpha x - ift] dx dt \quad (7)$$

$$i\mu u^* + \frac{dv^*}{dy} = 0 \quad (8)$$

$$\left(i \frac{\nu}{\mu} \right) \frac{d^4 v^*}{dy^4} + \left(\frac{f}{\mu} + U - 2i\alpha \nu \right) \frac{d^2 v^*}{dy^2} = \left\{ f + \mu^2 U + \frac{d^2 U}{dy^2} - i\alpha^2 \nu \right\} v^* \quad (9)$$

$$\left(i \frac{\nu}{\mu} \right) \frac{d^4 v^*}{dy^4} + (U - C - 2i\alpha \nu) \frac{d^2 v^*}{dy^2} - \left\{ \mu^2 (U - C) + U - i\alpha^2 \nu \right\} v^* \quad (10)$$

$$(U - C)(v^{*''} - \alpha^2 v^*) - U'' v^* = -\frac{i}{\alpha Re} (v^{*''''} - 2\alpha^2 v^{*''} + \alpha^4 v^*) \quad (11)$$

(11)式を解く事により、解 $u^*(\alpha, \eta)$ が得られ、(8)式を用いる事により u^* が得られるが、これらを使用して、 u, v に乗するスペクトルを作ると、 $S_u(\alpha, \eta) = \langle u^* \tilde{u}^* \rangle$, $S_v(\alpha, \eta) = \langle v^* \tilde{v}^* \rangle$ — (12) となる。ここで、 $\langle \rangle$ は ensemble average, $\sim$ は共役複素数、を意味し、スペクトルは one-sided spectrum である。

又クロススペクトル $P_{uv}(\alpha, \eta)$ は次の如く表し得る。 $P_{uv} = C_{uv} + iQ_{uv} = \langle \tilde{u}^* v^* \rangle$ — (13)

次に考えるスペクトルの波数領域を直接、粘性の影響が、 λ が λ_m になり慣性小領域 ($-5/3$ law) までに限れば、(11)式で動粘度係数 ν の η が η_m 項より右辺 = 0 と考えられる。この事は、 $Re \rightarrow \infty$ つまり非粘性の極限において、現象を考える事に見かけ上なってくる。このとき基本式は、 $(U-c)(v^* - \alpha^2 v^*) - U'' v^* = 0$ (14) となる。解析の段階として、次の様にする。(A) $U'' = 0$ つまり流速分布は直線、(B) $U = \eta^{1/2}$ つまり流速分布に指数則を代入した場合の2つに分ける。

(A) $U'' = 0$ この場合は第30回年度学術講演会において発表しているが結果のみを記す。

$$\sqrt{u'^2} / U_* = 2.2 e^{-\eta} \quad (15)$$

$$\sqrt{v'^2} / U_* = 1.7 e^{-\eta} \quad (16)$$

ここで U_* は shear velocity を意味している。(15), (16) 式と Laufer, Klebanoff 等の実験値とを Fig. 2, Fig. 3 に掲げておく。さらに乱流マクスウェル L の速度分布を求めてみる。Laufer 等の実験により、乱流場の大部分に於て、乱流 dissipation ϵ と production P は近似的に等しい事が示されている。つまり $P = -\overline{u'v'} \frac{dU}{dy} \approx \epsilon$ が成立している。よって次式が成立している。 $P = \frac{U_*^3}{\kappa H} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \approx \epsilon$ 。ここで Taylor によれば、 $\epsilon = A (\overline{u'^2})^{3/2} / L = A' (\frac{3}{2} \overline{u'^2})^{3/2} / L$ が成り立ち、等方性乱流の場合 Reynolds number $(\frac{3}{2} \overline{u'^2})^{1/2} L / \nu$ が十分大きいとき $A' \approx 0.2$ である事が知られている。これを用いると

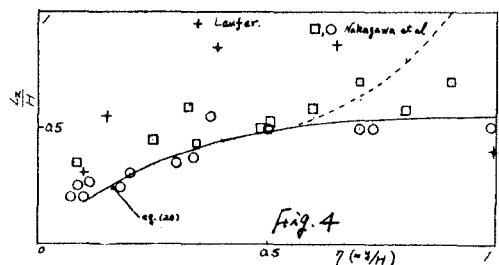
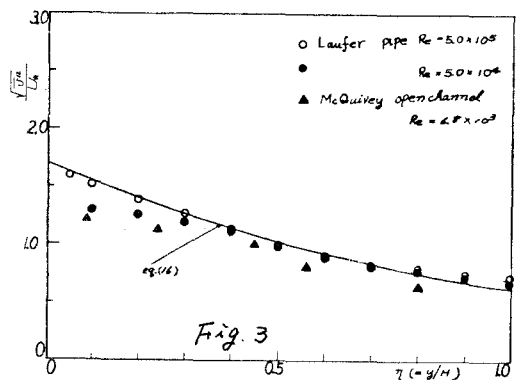
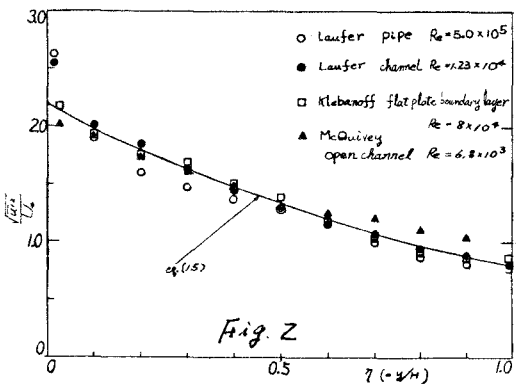
$$\epsilon = 0.2 \left(\frac{3}{2} \overline{u'^2} \right)^{3/2} \frac{1}{L} = 0.37 (\overline{u'^2})^{3/2} \frac{1}{L} \quad (17)$$

となるが、(15)式を(17)式に代入して $\epsilon = \frac{H}{L^3} = 3.94 \left(\frac{H}{L} \right) e^{-3\eta}$ (18)

を得る。実際の剪断乱流では $\epsilon = \frac{H}{L^3} = 5.4 \left(\frac{H}{L} \right) e^{-3\eta}$ (19) となる。(19)式は $\eta \leq 0.6$ で成立し、 $\eta > 0.6$ では、 ϵ はほぼ一定とみなせる。(19)式左辺の ϵ を上記の $P \approx \epsilon$ の関係を代入すると (20) 式を生む。

$$\frac{L}{H} = \begin{cases} 2.2 \left(\frac{\eta}{\eta-1} \right) e^{-3\eta} & \eta \leq 0.6 \\ 0.55 & 1.27 > \eta > 0.6 \end{cases} \quad (20)$$

$P \approx \epsilon$ の関係は $\eta \leq 0.6$ に於て成立しているが、 $\eta > 0.6$ に於ては $\epsilon = \text{一定}$ と置けることより、Scale L も一定となる。(20)式と Laufer, 中川の求めた L の実験値を Fig. 4 に掲げておく。Scale L の決定にはその測定方法と精度による不確かさは若干あるが、傾向としては(20)式は現象をかなり再現していると考えられる。



(B) $U = \eta \pi$ ($\eta = 6 \sim 8$) 流速分布に指数則を適用した場合を以下に述べる。

この case の基本式は (14) 式 $(U-C)(V^{*''} - \alpha^2 V^*) - U'' V^* = 0$ でありこれは安定同様に於いては, Rayleigh eq. と呼ばれる研究工たて来りものである。 $U \neq C$ とし、(14) 式は次の (21) 式となる。ここで convection velocity C は次の如く表現する。つまり $C = \xi U$ とおく。ここに ξ は 1 に近いが、

$$V^{*''} - \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U-C} \right) V^* = 0 \quad (21)$$

一般には 1 とは異なる数値を取るので、 $U = \eta \pi$ を (21) 式に代入すると (22) 式となる。(22) 式一般解は (23) 式で表される。

$$V^{*''} - \left(\alpha^2 + \frac{\frac{1}{2}(\eta-1)}{1-\xi} \frac{1}{\eta^2} \right) V^* = 0 \quad (22)$$

ここで I_r, K_r はそれぞれ 1 種、 J_n, Y_n が 2 種の変形 Bessel 関数であり order を r とするものである。 r は (24) 式で与えられる。

$$V^*(\alpha, \eta) = \eta^{\frac{1}{2}} \left[C_1(\alpha) I_r(\alpha \eta) + C_2(\alpha) K_r(\alpha \eta) \right] \quad (23)$$

変形 Bessel 関数の order r を決めるべく、 η, ξ を与えなければならぬ。 η と ξ は実験より 6 ~ 8 を取る事がわかる。

$$r = \left[\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}(\eta-1)}{1-\xi} \right]^{1/2} \quad (24)$$

とくると、従来より数多くの研究がなされて来た。また等方性乱流の場合、 $u'/U \ll 1$ が成り立つ場合に於いては、Taylor は云々 "frozen turbulence" の仮定を設け、C.C. Lin, Uberoi and Corrsin は "frozen turbulence" の成立条件を各自提出している。又剪断乱流においては、参考文献の (6) ~ (14) に掲げる如く、それぞれ研究者がそれぞれ理論的、実験的研究によって相異した convection vel. C (ξ) の定義とその結果を報告している。本研究では、Landahl (1967) の研究に基づき、 $C = C_R + i C_I$ に分り、 C_R が本来の意味に於ける convection vel., C_I は流下方向 (x 方向) への乱れの減衰率を表している。ここで ξ_R と ξ_I は 0.5 ~ 0.95, ξ_I と ξ_R は 0 ~ 0.02 を代入して数値解析を行く。 η は (23) 式で V^* が求まる事より (8) 式に代入して u^* を求むと (25) 式になる。

$$u^*(\alpha, \eta) = i \eta^{-\frac{1}{2}} \left[C_1(\alpha) F_1(\alpha, \eta) + C_2(\alpha) F_2(\alpha, \eta) \right] \quad (25) \quad \text{ここで } F_1, F_2 \text{ は次の (26), (27) 式で表される。}$$

$$F_1(\alpha, \eta) = \frac{1}{2\alpha} (I_r(\alpha \eta) + 2r I_r(\alpha \eta)) + \eta I_{r+1}(\alpha \eta) \quad (26) \quad F_2(\alpha, \eta) = \frac{1}{2\alpha} (K_r(\alpha \eta) + 2r K_r(\alpha \eta)) + \eta K_{r+1}(\alpha \eta) \quad (27)$$

次に (12), (13) 式によって u, v に関するスペクトル、クロススペクトルを作る。

$$\begin{aligned} S_v(\alpha, \eta) &= \langle V^* \tilde{V}^* \rangle = \eta \left[\langle C_1^2(\alpha) \rangle I_r \tilde{I}_r + \langle C_2^2(\alpha) \rangle K_r \tilde{K}_r + \langle C_1 C_2 \rangle (I_r \tilde{K}_r + \tilde{I}_r K_r) \right] \\ &= \eta \left[A(\alpha) I_r \tilde{I}_r + B(\alpha) K_r \tilde{K}_r + C(\alpha) (I_r \tilde{K}_r + \tilde{I}_r K_r) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$S_u(\alpha, \eta) = \langle u^* \tilde{u}^* \rangle = \frac{1}{\eta} \left[A(\alpha) F_1 \tilde{F}_1 + B(\alpha) F_2 \tilde{F}_2 + C(\alpha) (F_1 \tilde{F}_2 + \tilde{F}_1 F_2) \right] \quad (29)$$

$$P_{uv}(\alpha, \eta) = \langle \tilde{u}^* v^* \rangle = -i \left[A(\alpha) \tilde{F}_1 I_r + B(\alpha) \tilde{F}_2 K_r + C(\alpha) (\tilde{F}_2 I_r + F_1 \tilde{K}_r) \right] \quad (30)$$

ここで S_L は本来 stochastic なものであるが、(28) ~ (30) 式において、 I_r, K_r はその中で deterministic な部分を保持し、 $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$ が stochastic な部分を保持していると考えられる。よって (28) ~ (30) 式で $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$ がわかれば、 S_L の空間分布がわかる事になる。よって unknown として $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$ の 3 つを求めるべく次の 3 つの (境界) 条件を設ける。(1) $\eta = 1$ (管路中心) に於て $S_u(\alpha, 1)$ を与える。

(2) $\eta = 1$ に於て $S_v(\alpha, 1)$ を与える。(3) $\eta = 1$ に於て $-u'v' = 0$ ありクロススペクトル P_{uv} の実部 $C_{uv} = 0$ とする。これらの条件を行列表示すると (31) 式になる。

$$\begin{bmatrix} F_1 \tilde{F}_1 & F_2 \tilde{F}_2 & F_1 \tilde{F}_2 + \tilde{F}_1 F_2 \\ I_r \tilde{I}_r & K_r \tilde{K}_r & I_r \tilde{K}_r + \tilde{I}_r K_r \\ \text{IMAG}(I_r \tilde{F}_1) & \text{IMAG}(K_r \tilde{F}_2) & \text{IMAG}(\tilde{F}_2 I_r + F_1 \tilde{K}_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ B(\alpha) \\ C(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_u(\alpha, 1) \\ S_v(\alpha, 1) \\ C_{uv} = 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで $\text{IMAG}(\quad)$ は $(\quad)$ 内関数の虚部を表す。

(31)式を右辺の S_u, S_v には2重Fourier変換の本果の意味から考え、それぞれ3次元スペクトルを与なければならぬが、非等性乱流の3次元スペクトルは知られていない。von Kármánの提唱した(32)式を用いる。

$$S\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) = \text{const.} \frac{(\alpha/\alpha_0)^4}{[1+(\alpha/\alpha_0)^2]^{17/6}} \quad (32)$$

α_0 は乱流場の特徴的波数であり、1/2 orderである。LとすればLauterの実験より与える。

(31)式を解く事により得られた $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$ をそれぞれ(28), (29)式に代入し、任意の η の値に対する u のスペクトル形状の変化を示すものがFig.5である。さらに $\int_0^\infty S_u(\alpha) d\alpha = u'^2$ により u, v の r.m.s. を求めるものが、Fig.6, 7である。又Fig.8は u, v のスペクトル比 S_v/S_u を示すものである。

なお本研究で用いた複素オーダー変形ベッセル関数は、著者の知る限りではその数値が公表されていない。数値計算により級数展開式を忠実に実行した。その際必要となる複素 argument のガンマ関数の計算は、東大計算センターより公表されているライブラリーを使用した。

3. 考察 上記の計算手法により得られた結果は従来、実験報告とかなりの良い一致を示しているもの。その細部にいふことは若干のズレが見られる。その理由としては以下のものが考えられる。(1) 本研究では乱流を2次元の波動と考え、2次元の u に対し、乱流は本質的に3次元である。(2) 基本式においては、乱流強度に関する非線型項を含まない。よって高周波側の energy 伝達の機構を含まない(平均流と相互作用は含んでいる)。(3) convection velocity 自身も波数の関数でなければならぬが、今回の解析では一定と置いている。上記の諸理由は今後さらに研究して行く所である。

4. 参考文献 1) Lauter, J. NACA TR 1174 1954

2) Klebanoff, P.S. NACA TR 1247 1955

3) Ljatkher, V.M. Proceedings XII th IAHR Congress (Fort Collins) Vol 2, 1967

4) Lin, C.C. Quart. Appl. Math. 10, 1952

5) Uberoi, M.S., Corsin, S. NACA TR 1142, 1953

6) Favre, A.J. et al. J. Fluid Mech. 2, 3, 1957, 1958

7) Corcos, G.M. J. Fluid Mech. 18, 1964.

8) Wilmarth, W.W. et al. J. Fluid Mech. 14, 1962

9) Fisher, M.J. et al. J. Fluid Mech. 18, 1964

10) Lumley, J.L. Phys. Fluid 8 1965

11) Landahl, M. J. Fluid Mech. 29, 1967

12) Willis, J.A.B. J. Fluid Mech. 45, 1970

13) Comte-Bellot, G. et al. J. Fluid Mech. 78, 1971

14) Taylor, G.I. Proc. Roy. Soc. London 157A 1936

15) Kármán, Th. von. J. Marine Research 7, 1948

