

II-24 Pickup Function と非平衡流砂量式

東京工業大学 正員 日野幹雄

同 学生員。石川忠晴

不等流においては流砂はその慣性によって水流に対して遅れを持ち、この為流砂量はその点より上流の流れの状態に支配されると考えられる。一方pickup量 g_t (cm/s) (単位時間に河床の単位面積から飛び出す砂粒子の体積) はその点での流れによって決まる。したがってpickup量と流れのパラメーターとの関係は流砂の問題において基本的に重要な意味を持つ。本研究はこの関係を取り扱い、あわせて不等流下の流砂量について考察を行ったものである。

1. Pickup Function

球状の砂粒子の上下端に圧力差 Δp (静圧を除く) が働いたとすると揚力 L は次のようにあらわされる。

$$L = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\pi}{8} d^2 \Delta p \quad d; \text{粒径}, \quad \alpha_i; \text{圧力分布形によって決まる係数} \quad (1)$$

揚力が粒子重量と等しい場合の圧力差 Δp_c と上向き合力 F はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta p_c = \alpha_i (p_s - p) g d \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\pi}{8} d^2 (\Delta p - \Delta p_c) \quad (3)$$

砂粒子一個を飛び出させるに必要な力積を g_0 とすると単位時間、単位面積から飛び出す砂粒子の個数は

$$n = n_b \frac{\overline{F^+}}{g_0} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} d^2} \frac{\overline{F^+}}{g_0} \quad \begin{array}{l} F^+; F \text{ の負の部分 をゼロとしたもの} \\ n_b; \text{河床の単位面積あたりの粒子数} \end{array} \quad (4)$$

砂粒子の径が慣性領域の乱れのスケールであると仮定すると次式を得る。

$$\Delta p \approx 5.09 u_*^2 \quad (5)$$

一方pickup量は次式であらわされる。

$$g_t = \frac{\pi}{8} d^3 n = \frac{\pi d^3 \Delta p}{9 \alpha_i g_0} \int_{\xi_c}^{\infty} (\xi - \xi_c) g(\xi) d\xi \quad \begin{array}{l} \xi = (\Delta p - \Delta p_c) / \Delta p \quad \xi_c = (\Delta p_c - \Delta p) / \Delta p \\ g(\xi); \xi \text{ の確率密度関数} \end{array} \quad (6)$$

ここに確率密度分布はGauss分布と考えるのが自然である。事実 Einstein & El-Samni⁽⁷⁾ は半球について圧力差を測定し次のような確率密度関数を示している。

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-2\xi^2) \quad (7)$$

(2), (5), (7) 式を(6)式に代入すると多少の演算の後次式を得る。

$$g_t = \frac{5\sqrt{\pi}}{18\alpha_i} \frac{p u_*^2 d^3}{g_0} f(\eta_c) \quad f(\eta_c) = \frac{1}{2} \exp(-\eta_c^2) - \eta_c \text{Erf}(\eta_c) \quad \eta_c = \sqrt{2} \left(\frac{0.2\alpha_i}{L_*} - 1 \right), \quad L_* = \frac{u_*^2}{(p/p_s - 1)gd} \quad (8)$$

g_0 を粒子が沈降する際に持っている運動量に比例すると仮定すると

$$g_0 \propto \{ (p/p_s - 1)gd \}^{1/2} p_s d^3 \quad (9)$$

(9)式を(8)式に代入して新しく比例係数をつければ、

$$g_{T*} = \frac{g_T}{\{(P_3/P-1)gd\}^{1/2}} = \frac{A_1}{\alpha_1} \cdot \frac{P}{P_3} \tau_* f(\eta_c) \quad (10)$$

(10)式は未定係数 A_1 と α_1 を含んでいる。 A_1 は(9)式を仮定する際の比例係数を含んでいるから理論的に求めることはできない。 α_1 は揚力の補正係数で1のオーダーである。さて、芦田ら⁽²⁾はトレーサー実験から次の実験式を得ている。

$$g_{T*} \propto \frac{u_* (u - u_c)}{(P_3/P-1)gd} \quad (11)$$

$u \propto u_*$ とすれば次式となる。

$$g_{T*} \propto \tau_* (1 - \sqrt{\frac{2.05}{\tau_*}}) \quad (12)$$

ただし $\tau_{*c} = 0.05$ とした。(10)式と(12)式を比較したのが図1である。ここに

$$F_1 = \frac{\tau_*}{\alpha_1} \cdot f(\eta_c) \quad F_2 = \tau_* (1 - \sqrt{\frac{2.05}{\tau_*}}) \quad (13)$$

図から明らかなように F_1 と F_2 はほぼ比例関係にある。したがって(10)式と(12)式は P/P_3 の部分を除けばほぼ同じ関係を示しているのである。

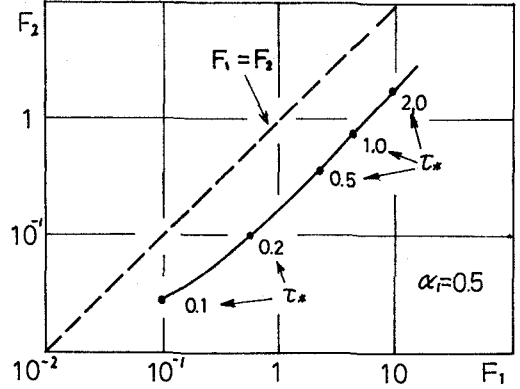


図 1

2. 等流下の流砂量

砂粒子の平均移動距離を $\bar{x}$ とすると流砂量は次式であらわされる。

$$g_B = g_T \bar{x} \quad g_B: \text{流砂量} \quad (14)$$

砂粒子が運動量 g_0 を持って飛び出て流れ方向に速度 u で輸送されると粘性抵抗を無視すれば $\bar{x}$ は次のように考えられる。

$$\bar{x} \propto \frac{P_3 u d^{1/2}}{P(P_3/P-1)g^{1/2}} \quad (15)$$

$u \propto u_*$ として次のように置く

$$\bar{x} \propto \frac{P_3}{P} d \tau_*^{1/2} \quad (16)$$

(10)、(14)、(16)式から

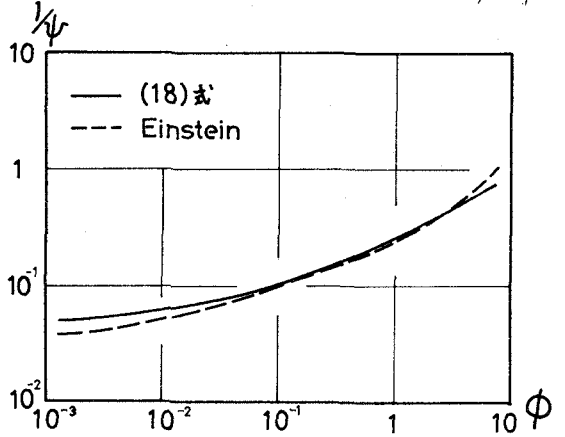
$$g_B = A_3 \{(P_3/P-1)gd\}^{1/2} \tau_*^{3/2} f(\eta_c) \quad (17)$$

これを変形して

$$\Phi = A_3 \left(\frac{1}{\psi} \right)^{3/2} f(\eta_c) \quad (18)$$

(18)式の関係を図2に示す。図中の点線はEinsteinの掃流砂関数である。⁽³⁾

図 2



3. 非平衡流砂量式

$f_0(x)$ を $x=0$ の点から飛び出た砂粒子が座標 x の点を通過する率とする。流砂量 g_B は次式であらわされる。

$$g_B(x) = \int_{-\infty}^x g_T(\xi) f_0(x-\xi) d\xi \quad (19)$$

これを微分して

$$\frac{d g_B}{d x} = g_A(x) + \int_{-\infty}^x g_A(\xi) \cdot \frac{d k(x-\xi)}{d x} d \xi \quad (20)$$

砂粒子の一回の跳躍距離の確率密度関数を $g_B(x)$ とすると

$$\frac{d f(x)}{d x} = -g_B(x) \quad (21)$$

$g_B(x)$ が指数分布に従うことが実験的に示されている。⁽⁴⁾ したがって

$$g_B(x) = \frac{1}{\bar{x}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right) \quad (22)$$

(22) を (20) に代入すると次式を得る。

$$\frac{d g_B}{d x} = g_A(x) + \int_{-\infty}^x g_A(\xi) \exp\left(-\frac{x-\xi}{\bar{x}}\right) d \xi \quad (23)$$

さて、前に示したように g_A は水流の状態に対して敏感に反応する一方、 $\bar{x}$ はそれ程急激には変わらない。したがって流速などが小さな幅でゆるやかに変化する場合を考えれば、 $\bar{x}$ を近似的に定数とみなしてよいであろう。

(21), (22) 式から

$$f_B(x) = \exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right) \quad (24)$$

(19), (23), (24) 式から次式が得られる。

$$\frac{d g_B}{d x} = g_A - \frac{g_B}{\bar{x}} \quad (25)$$

これを变形して

$$\bar{x} \frac{d g_B}{d x} + g_B = g_{B0} \quad (26)$$

$$g_{B0} = \bar{x} g_A$$

(14) 式と比較すればわかるように、 g_{B0} はその点での流れと同じ水理量の等流についての流砂量である。

4. 応 用 —— 河床波の発生について

Kennedy⁽⁵⁾ の河床波発生理論では遅れ距離 δ が重要な役割を果しているが、これについての充分な説明は与えられていなかった。ここでは流砂量式として (26) 式を用い、 δ を仮定せずに河床波の発生を説明する。Kennedy と同様に sine 型の波面上のポテンシャル流を考え、等流フラットベッドの流砂量式として次式を用いる。

$$g_{B0} = \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n_{y=-d} \quad d: \text{水深}, \alpha: \text{比例係数}, \phi: \text{速度ポテンシャル} \quad (27)$$

速度ポテンシャル ϕ は次式であらわされる。

$$\phi = Ux + iUa_1 \frac{\cosh k(D-d)}{\sinh kD} \cdot \exp\{ik(x - U_b t)\} \quad (28)$$

ここに U : 平均流速, a_1 : 表面波の振幅, k : 河床波の波数, U_b : 河床波の下流への伝播速度

$$d; U^2 = (g/k) \tanh kD$$

また表面波の振幅 a_1 と河床攪乱の振幅 a_2 とは次の関係にある。

$$a_2 = a_1 \frac{\sinh k(D-d)}{\sinh kD} \quad (29)$$

(27), (28) 式を (26) 式に代入し微小項を落とし整理すると次式を得る。

$$g_B = \alpha \left[U^n - a_2 \frac{nk(1-ik\bar{x})}{1+k^2\bar{x}^2} U^n \coth k(D-d) \exp\{ik(x-U_B t)\} \right] \quad (30)$$

(30)式を流砂の連続式に代入すると次の関係が得られる。

$$U_b = \frac{\bar{g}_B}{1-\lambda} \frac{nk}{1+k^2\bar{x}^2} \coth k(D-d) \quad (31)$$

$$a_2 = a_2(0) \exp \left[\left\{ \frac{\bar{g}_B}{1-\lambda} \frac{nk\bar{x}}{1+k^2\bar{x}^2} \coth k(D-d) \right\} t \right] \quad \bar{g}_B; \text{平均流砂量} \quad (32)$$

λ ; 空隙率

(32)式から $\coth k(D-d)$ が正の時に sine 型攪乱が發生することがわかる。またこの時上流に伝播すること(31)、水面波と河床の攪乱とは逆位相になっていること(29)、がわかる。これは *antidunes* の性状と一致しており、したがって *antidunes* はこのようなメカニズムで發生するのではないかと考えられる。また、この方法では *dunes* の發生を導くことができなかったが、これは *dunes* 上の流れをポテンシャル流で充分近似することができないからであろうと思われる。そこで粘性の影響を入れて流れの場を記述し上述の理論を適用すれば *dunes* の發生を説明することが可能であろうと考えられる。

5. おわりに

流砂現象を揚圧力による pickup と平均流による輸送の二つのプロセスに分けて考えると、前者は後者に較べて水流の状態に敏感である。一方、不等流では砂粒子の慣性によって流砂量は上流の pickup 量に依存するので、水理パラメーターと pickup 量の関係が重要な意味を持つ。くる。特に小スケールの河床変動においてはこのことのもたらす効果が支配的な役割を果たすと考えられる。ここではそのような例として河床波の發生を取り扱った。

本報告では pickup function と非平衡流砂量式を別々に取り扱った。これは両者を結びつける部分、すなわち砂粒子の移動距離についてわからない点が多いからである。今後この点について検討をおこない両者を統一的に説明しようと考えている。

参考文献

- (1) Einstein, H. A., El-Samni, E. A., Hydrodynamic Forces on a Rough Wall, *Reviews of Modern Physics* volume 21, number 3, July, 1949
- (2) 芦田和男, 木村昌弘, 河床波の發生發達過程に関する研究, 沖積地河川における河床形態と流体抵抗の研究, 文部省科学研究, 総合研究(A)昭和48~49年度, 研究代表者 岸 力, 1975
- (3) 応用水理学中Ⅱ, 丸善
- (4) 道上正規, 流砂と河床変動に関する基礎的研究, 京都大学, 1972
- (5) Kennedy, J. F., The Mechanics of Dunes and Antidunes in Eroding Bed Channels, *J. Fluid Mech.* vol. 16, part 4, 1963
- (6) 日野幹雄, 宮永洋一, 河床波の發生機構, 第30回年次学術講演会, 1975
- (7) 佐藤清一, 吉川秀夫, 芦田和男, 河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1), 土木研究所報告,