II－19　カルマン・フィルターによる流出予測計算例

法政大学　正会員　西谷 隆亘

1. はじめに

従来の流出解析法は、流出模型のパラメータを既往の出水に対して固定して、その模型を用いて降水量データを入力として流出計算を行うものであった。しかし、その場合、流出模型のパラメータの同定に用いた出水に対しては、当然の事ながら精度よく計算されるが、他の出水に対しては結果が思わしくない事が多い。

ここで報告しようとするカルマン・フィルターによる計算方法は、単に線型性ということに重点が置かれていて、流出計算模型の物理的意味は多少あいまいになるかも知れないが、フィードバック適応制御により計算精度の向上が計られているので、計算精度が出水毎に大きく異なるということはない。しかしながら、フィードバック適応制御であるため、フィードバックに用いるデータが与えられないと計算精度は保証されない。従って、模型が正しく設定されていなかったり、そのパラメータの正確な値がなく且つ計算値に対応する実測データがその都度与えられない場合には、この方法は不適である。すなわち、模型のパラメータが与えられていても、降水データだけが与えられて、流出計算を行うことは、この方法ではできない。同じ模型であるにしても、計算方法は最早や、別物である。

2. 線型流出模型

線型性をもつ流出模型は、一般に、自己回帰模型に表現できる。それは次のようになる。

$$q(t+1)=A\times q(t)+U\times P+C \qquad (1)$$

ここに　$q(t+1)$, $q(t)$; 時刻$(t+1)$, t での流量

P ; 降水量あるいはその他入力に関する変量

A, U, C ; これらは係数であるが、時間に依存する場合もある。

Aは減水定数, Uはユニットハイドログラフ, Cは余項であるが場合によっては、基底流量に対応するものと考えることもできる。そして、多変数の場合は、それらはベクトルやマトリクスで表現される。

例えば、流出が地下水流出(基底流出) q_s と表面流出(直接流出) q_r から構成される場合は、各々が線型性を持つとすれば、

$$\begin{cases} q(t)=q_s(t)+q_r(t) & (2)\\ q_s(t+1)=A_s\,q_s(t)+U_s\,P_s(t)+C_s & (3)\\ q_r(t+1)=A_r\,q_r(t)+U_r\,P_r(t)+C_r & (4)\end{cases}$$

と表わされる。普通のユニットハイドログラフ法では、$A_r=0$, $C_r=0$ であり、U_r がユニットハイドログラフで、$P_r(t)$ は有効降雨時系列である。基底流出が指数減水型ならば、A_s は減水定数, $U_s=1-A_s$, $C_s=0$ で $P_s(t)$ は対応する降水量である。

(3), (4) 式における C_s , C_r は各々の系における定数入力と見做せば、$C_r\equiv 0$, $C_s\equiv 0$ としても構わない。

(2)～(4)式をマトリクス表現にすると

$$\begin{cases} q(t)=\mathbb{D}\times\mathbb{Q}(t) & (5)\\ \mathbb{Q}(t+1)=\mathbb{A}\times\mathbb{Q}(t)+\mathbb{U}\times\mathbb{P} & (6)\end{cases}$$

ここに　太字はベクトルやマトリクスを表わし、' で転置を書くと

$$\mathbb{D}=[1\ ,\ 1]\quad ,\quad \mathbb{Q}'(t)=[\,q_s(t)\ ,\ q_r(t)\,]$$

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \mathbb{U}=\begin{bmatrix} U_s & 0 & C_s \\ 0 & U_r & C_r \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}'=[P_s, P_r, 1]$$

のようになる。

3. カルマン・フィルターの概略

R.E. Kalman (1960)により提示されたフィルター理論は次のようなものである。より一般的な型で書くと

$$\begin{cases} \text{状態方程式} \quad \mathbb{x}(k+1)=\Phi(k+1;k)\mathbb{x}(k)+\Theta(k+1;k)\mathbb{u}(k)+\mathbb{v}(k) & (7) \\ \text{観測方程式} \quad \mathbb{y}(k)=\mathbb{D}(k)\mathbb{x}(k)+\mathbb{w}(k) & (8) \end{cases}$$

ここに 小文字 $\mathbb{x}(k)$, $\mathbb{u}(k)$, $\mathbb{v}(k)$, $\mathbb{y}(k)$, $\mathbb{w}(k)$ などは ベクトルで, $\Phi(k+1;k)$, $\Theta(k+1;k)$, $\mathbb{D}(k)$ などは、マトリクスである。添字はステップを表わす。

$\mathbb{y}$は観測値, $\mathbb{u}$は入力値, $\mathbb{v}$及び$\mathbb{w}$は誤差ベクトル, $\mathbb{x}$は状態量を表わす変量で, 観測不可能なものであってもよい。

(7), (8) 式で表わされるシステムがあり, 係数マトリクス Φ, Θ, $\mathbb{D}$や誤差の分散などが既知で, 各ステップでの入力$\mathbb{u}$や出力$\mathbb{y}$が与えられる時, 状態変量$\mathbb{x}$の最適推定値 $\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k|k)$, $\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k+1|k)$は, 最小自乗法の意味で, 次の逐次式により与えられる。

$$\begin{cases} \Delta(k)=\mathbb{P}(k|k-1)\mathbb{D}'(k)\left[\mathbb{D}(k)\mathbb{P}(k|k-1)\mathbb{D}'(k)+\mathbb{R}(k)\right]^{-1} & (9) \\ \hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k|k)=\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k|k-1)+\Delta(k)\{\mathbb{y}(k)-\mathbb{D}(k)\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k|k-1)\} & (10) \\ \hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k+1|k)=\Phi(k+1;k)\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k|k)+\Theta(k+1;k)\overline{\mathbb{u}}(k) & (11) \\ \mathbb{P}(k|k)=\mathbb{P}(k|k-1)-\Delta(k)\mathbb{D}(k)\mathbb{P}(k|k-1) & (12) \\ \mathbb{P}(k+1|k)=\Phi(k+1;k)\mathbb{P}(k|k)\Phi'(k+1;k)+\Theta(k+1;k)\mathbb{S}(k)\Theta'(k+1;k)+\Omega(k) & (13) \end{cases}$$

但し $\overline{\mathbb{u}}(k)=E[\mathbb{u}(k)]$, $\mathbb{S}(k)=E[(\mathbb{u}(k)-\overline{\mathbb{u}}(k))(\mathbb{u}(k)-\overline{\mathbb{u}}(k))']$, $\mathbb{R}(k)=E[\mathbb{w}(k)\mathbb{w}'(k)]$, $\Omega(k)=E[\mathbb{v}(k)\mathbb{v}'(k)]$

出力$\mathbb{y}$の最適推定値 $\hat{\mathbb{y}}^{\circ}(k)$, $\hat{\mathbb{y}}^{\circ}(k+1)$ は, 次式で与えられる。

$$\begin{cases} \hat{\mathbb{y}}^{\circ}(k)=\mathbb{D}(k)\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k|k) & (14) \\ \hat{\mathbb{y}}^{\circ}(k+1)=\mathbb{D}(k+1)\hat{\mathbb{x}}^{\circ}(k+1|k) & (15) \end{cases}$$

以上がカルマン・フィルター理論の概略であるが, (5), (6)式と(7), (8)式の類似性に気づかれると思うが, 本稿では, 類似性にのみ着目して, 係数には何らの制約(例えば$\mathbb{A}$の要素のあるものは零)も加えないで, 流出計算に応用した結果を報告し, その適用性を検討する。

4. おわりに

逐次入力による計算法は, オンライン制御に用いると優れた性能を発揮すると思われるが, このカルマン・フィルターは, 解の前提が, 推定値の修正が推定値と観測値の差に比例する点にあり, 変数のとり方によっては, 解は振動したり, 時間的な遅れが生じたりする。これはフィードバック制御の宿命であり, 安定な流出模型の開発が望まれる。

参考文献

1° Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", Trans. ASME, Series D, Jour. of Basic Engineering, Vol. 82, March 1960, pp. 35-45

2° 相良 節夫, 「同定問題」, 計測と制御, 第8巻, 第4号, 昭和44年4月, pp. 268-280

3° 日野 幹雄, 「水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用」, 土木学会論文報告集, 第221号, 1974年1月, pp. 39-47

その他 1975年2月 水理講演会論文集 などに発表されている。