

II-8

地下水の揚水における非定常解

—: 区分的に線形な解:—

東海大学 正 員 〇星田 義治
東海大学 正 員 濱野 啓造
東海大院 学生員 市川 勉

1. ま え が き

地下水の揚水時における井戸への非定常流の基礎式を解く場合、境界条件として用いられている $r \rightarrow 0$ で $Q_r \rightarrow Q$ 、または、 $r \rightarrow r_0$ (r_0 : 井戸半径) で $Q_r \rightarrow Q$ (Q_r : 井戸の中心から r の距離における断面を井戸へ向って流れている地下水の流量、 Q : 井戸における一定の揚水量) は、井戸の実際の状態を表現するのに不十分である。これらの条件で解いた、サイス (Theis)・野満、岸・三宅・池田等による理論解と実験値を比較した場合、井戸から離れた地点での揚水試験のデータで計算した透水係数がだんだんと大きくなるという結果を得た。この理由の一つに、境界条件のとり方があると思われるので、著者等は、境界条件として、新たに井戸における連続の条件を現実と即した形に改善し、非線形の基礎式を解いた。この場合、基礎式において、水位 h をある短い時間毎に一定として線形化して解いた。(区分的に線形な解と呼ぶことにする。)

2. 基礎式の解 (不圧地下水の場合)

基礎式

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{k}{\beta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h \frac{\partial h}{\partial r}) \quad (1)$$

ここに、 k : 透水係数、 β : 有効空隙率

初期条件および境界条件

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \quad h=H, h_w=H \\ t>0 \quad Q=Q_0 \text{ (一定量くみ上げ)} \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \quad h \rightarrow H \\ r=r_0 \quad (A_w - A_p) \frac{dh_w}{dt} = Q_{(r_0)} - Q \end{array} \right\} \quad (3)$$

ここに、

$$Q_{(r_0)} = (2\pi r k h \frac{\partial h}{\partial r})_{r=r_0}$$

A_p : 揚水管の断面積、 A_w : 井戸の断面積

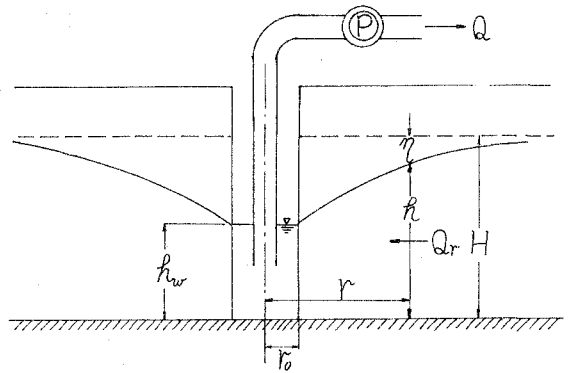
次のようにおいて、無次元化する。

$$g = \frac{h}{H}, \quad g_w = \frac{h_w}{H}, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{\beta r_0^2}{k H} \quad (4)$$

式(4)を用いると、式(1)は、次の無次元式になる。

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x g \frac{\partial g}{\partial x}) \quad (5)$$

$g=1$ (水位降下が非常に小さいとき、 $h \equiv H$) とすると、



図・1 不圧地下水

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial x}$$

となる。これは、サイス (Theis) の式である。

初期条件および境界条件は、次のようになる。

$$\left. \begin{array}{lll} \tau=0 & g=1 & g_w=1 \\ \tau>0 & x=1 & \frac{1}{2\beta'} \frac{dg_w}{d\tau} = (xg \frac{\partial g}{\partial x})_{x=1} - Z \\ & x \rightarrow \infty & g=1 \end{array} \right\} \quad (6)$$

ただし, $\beta' = \beta / (1 - \frac{A_p}{A_w})$, $Z = \frac{Q}{2\pi k H^2}$

解析方法

時間微分項を一次の差分式でおきかえ、 $\Delta\tau$ 時間毎の水位の変化を求めていく。このとき、式(5)の $(xg \frac{\partial g}{\partial x})$ を $\bar{g}(x \frac{\partial g}{\partial x})$ のように $\bar{g}$ を一定とおいて線形化する。数値計算をする場合を考慮して、 $\tau=0$ における諸量に添字1をつけ、 $\tau=(N-1)\Delta\tau$ 時間における値に添字Nをつける。 $\tau=0$ では、式(7)のようになる。

$$g_1(x) = 1, \quad g_{w1}(x) = 1, \quad g_1'(x) = 0 \quad (7)$$

$\tau=\Delta\tau$ ($N=2$) においては、時間区画 $\Delta\tau$ を十分小さくすると、

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{g_2(x) - g_1(x)}{\Delta\tau}$$

と近似できる。さらに、

$$\frac{\partial}{\partial x} (xg_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}) \doteq \bar{g}_2 \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial g_2}{\partial x})$$

のように、水位 $\bar{g}_2$ を一定値として、線形化すると、 $g_1(x)=1$ であるので、 $\bar{g}_2 \doteq 1$ とおける。したがって、式(5)は、次のようになる。

$$\frac{d^2 g_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dg_2}{dx} - \alpha_2^2 g_2 = -\alpha_2^2 g_1 \quad (8)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta\tau}} \quad (9)$$

式(8)の一般解は、 $g_1=1$ を考慮すると式(10)のようになる。

$$g_2(x) = 1 + C_1 I_0(\alpha_2 x) + C_2 K_0(\alpha_2 x) \quad (10)$$

$x \rightarrow \infty$ で、 $g_2=1$ の条件より、 $C_1=0$ 。したがって、

$$g_2(x) = 1 + C_2 K_0(\alpha_2 x) \quad (11)$$

C_2 は、 $x=1$ の境界条件より求める。式(6)における時間微分項を差分式におきかえ、

$$g_2(1) \frac{\partial g_2(1)}{\partial x} \doteq g_1(1) \frac{\partial g_1(1)}{\partial x}$$

と近似すると、式(6)は、式(12)のようになる。

$$\frac{g_{w2} - g_{w1}}{2\beta \Delta \tau} = \frac{\partial g_2(1)}{\partial x} - \Sigma \quad (12)$$

さらに、井戸の水位は、井戸のすぐ外側の地下水位に常に等しい〔 $g_{w2} = g_2(1)$, $g_{w1} = g_1(1)$ 〕とおき、式(11)の關係を用いると、 C_2 は式(13)のようになる。

$$C_2 = - \frac{\Delta \tau \cdot \Sigma}{\Delta \tau \alpha_2 K_1(\alpha_2) + \frac{K_0(\alpha_2)}{2\beta}} \quad (13)$$

したがって、 $\tau = \Delta \tau (N=2)$ における水位は、次のようになる。

$$g_2(x) = 1 - \frac{\Delta \tau \Sigma K_0(\alpha_2 x)}{\Delta \tau \alpha_2 K_1(\alpha_2) + \frac{K_0(\alpha_2)}{2\beta}} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} g_2(1) &= 1 - \frac{\Delta \tau \Sigma K_0(\alpha_2)}{\Delta \tau \alpha_2 K_1(\alpha_2) + \frac{K_0(\alpha_2)}{2\beta}} \\ g'_2(x) &= \frac{\Delta \tau \Sigma \alpha_2 K_1(\alpha_2 x)}{\Delta \tau \alpha_2 K_1(\alpha_2) + \frac{K_0(\alpha_2)}{2\beta}} \\ g'_2(1) &= \frac{\Delta \tau \Sigma \alpha_2 K_1(\alpha_2)}{\Delta \tau \alpha_2 K_1(\alpha_2) + \frac{K_0(\alpha_2)}{2\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$\tau = (N-1)\Delta \tau$ における $g_N(x)$ は、 $N=2$ までに用いた同じ方法で考えると、式(16)が得られる。

$$\frac{d^2 g_N}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dg_N}{dx} - \alpha_N^2 g_N(x) = -\alpha_N^2 g_{N-1}(x) \quad (16)$$

$$\alpha_N = \frac{1}{\sqrt{\Delta \tau g_N}}, \quad \bar{g}_N(x) = \sum_{i=1}^M g_{N-1}(x) / M \quad (17)$$

式(16)の一般解は、式(18)で与えられる。

$$\begin{aligned} g_N(x) &= g_{N-1}(x) + I_0(\alpha_N x) \left\{ C_1 - \int_1^x K_0(\alpha_N \xi) \frac{d}{d\xi} [\xi g'_{N-1}] d\xi \right\} \\ &\quad + K_0(\alpha_N x) \left\{ C_2 + \int_1^x I_0(\alpha_N \xi) \frac{d}{d\xi} [\xi g'_{N-1}] d\xi \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、定数 C_1 , C_2 は境界条件より次のように定める。

$x \rightarrow \infty$ で $g_N(x) \rightarrow 1$ の条件より式(19)、式(20)となる。

$$C_1 = \int_1^\infty K_0(\alpha_N \xi) \frac{d}{d\xi} (\xi g'_{N-1}) d\xi \quad (19)$$

$$\text{ここに,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} K_0(\alpha_N x) \int_1^x I_0(\alpha_N \xi) \frac{d}{d\xi} (\xi g'_{N-1}) d\xi = 0 \quad (20)$$

であり、式(20)が収束することは確認している。

C_2 は、 $x=1$ における境界条件から定める。式(16)の時間微分を差分でおきかえ、 $g_2(x)$ の場合と同様に考えて、式(21)を得る。

$$\frac{g_N(1) - g_{N-1}(1)}{2\beta \Delta \tau} = g_{N-1}(1) g'_N(1) - \Sigma \quad (21)$$

式(18)から、式(22)、(23)、(24)が得られる。

$$g_N(1) = g_{N-1}(1) + C_1 I_0(\alpha_N) + C_2 K_0(\alpha_N) \quad (22)$$

$$g'_N(x) = g'_{N-1}(x) + \alpha_N I_1(\alpha_N x) \left[C_1 - \int_1^x K_0(\alpha_N \xi) \frac{d}{d\xi} (\xi g'_{N-1}) d\xi \right] \\ - \alpha_N K_1(\alpha_N x) \left[C_2 + \int_1^x I_0(\alpha_N \xi) \frac{d}{d\xi} (\xi g'_{N-1}) d\xi \right] \quad (23)$$

$$g'_N(1) = g'_{N-1}(1) + C_1 \alpha_N I_1(\alpha_N) - C_2 \alpha_N K_1(\alpha_N) \quad (24)$$

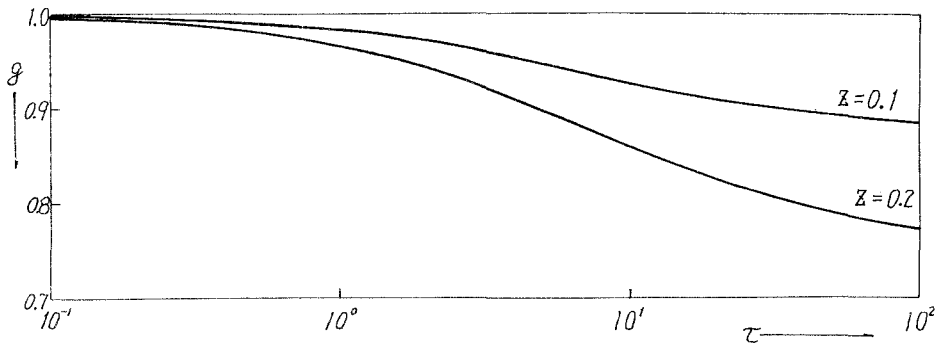
式(21)、(22)、(24)より C_2 は次のようになる。

$$C_2 = \frac{\Delta\tau \{Z - g_{N-1}(1) g'_{N-1}(1)\}}{\Delta\tau \alpha_N g_{N-1}(1) K_1(\alpha_N) + \frac{K_0(\alpha_N)}{2\beta'}} \\ - \frac{\Delta\tau \alpha_N g_{N-1}(1) I_1(\alpha_N) - \frac{I_0(\alpha_N)}{2\beta'}}{\Delta\tau \alpha_N g_{N-1}(1) K_1(\alpha_N) + \frac{K_0(\alpha_N)}{2\beta'}} \cdot C_1 \quad (25)$$

式(18)を用いれば、任意の地点の水位の変化が $\Delta\tau$ 時間毎に計算できる。また、 $g_N(x)$ や $g'_N(x)$ が算定されると、任意の地点 x を通過する流量

$$Q_r = 2\pi k h x g \frac{\partial g}{\partial x}$$

も $\Delta\tau$ 時間毎に計算される。式(18)を数値計算して、 g 、 x 、 Z 、 β の関係を図で表わしておくと、実験データのグラフを重ね合わせることによって、帯水層定数 k 、 β を求めることができる。



図・2 g と τ ($\beta=10\%$)

式(18)において、 A_p 、 A_w 、 Z 、 β を入力として与えて算定したものを g と τ についてグラフに書くと、およそ図・1のような傾向になる。

今回の発表は、井戸における連続条件式(3)を考慮した解を求めたもので、実験による十分なる検討は、今後に残されている。

なお、この研究について東京大学の玉井先生の御助言を受けたことを深く感謝致します。