II－2　斜面を通過する長波の反射率について

中央大学理工学部　正員　首藤　伸夫
〃　〃　○学員　森　龍三

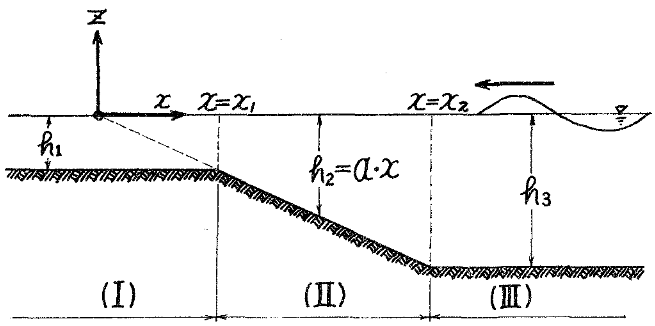
長波が大陸棚斜面のような海底勾配の急変する所を通過する場合の反射率について，理論式を導き，実験値と比較する。

波は一次元の進行波で，微小振幅長波とする。流体は，非粘性，非圧縮性，非回転運動と仮定し，海底勾配を一定として解析した。

(I)　$x \leqq x_1$　$h = h_1$

(II)　$x_1 \leqq x \leqq x_2$　$h = h_2 = a \cdot x$

(III)　$x_2 \leqq x$　$h = h_3$



図−1

図−1に座標系と領域を示す。

取扱うのは一次元の微小振幅長波であるから，x方向の速度成分をuとすると，方程式は次のようになる。

運動の方程式　$u_t + g\eta_x = 0$ ——— ①　　連続の方程式　$\eta_t + (uh)_x = 0$ ——— ②

①，②式で，流量を$Q = b(uh)$で表わすと，

$$Q_t + ghb\eta_x = 0 \quad \text{——— ③} \qquad \eta_t + \frac{1}{b}Q_x = 0 \quad \text{——— ④}$$

そこで，③式をtで，④式をxでそれぞれ偏微分し，さらに，時間因数$e^{i\omega t}$を用いると，次の式が求まる。

$$b\left(\frac{1}{b}Q_x\right)_x + \frac{\omega^2}{gh}Q = 0$$

水路幅bを単位幅で考えると，

$$Q_{xx} + \frac{\omega^2}{gh}Q = 0 \quad \text{——— ⑤}$$

(I)，(II)，(III)の領域における⑤式の一般解は次のとおり。

(I)　$x \leqq x_1$　$h = h_1$　$Q_1 = Ee^{ik_1 x}$

(II)　$x_1 \leqq x \leqq x_2$　$h = a x$　$Q_2 = C\sqrt{x}\,N_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x}\right) + D\sqrt{x}\,J_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x}\right)$

(III)　$x_2 \leqq x$　$h = h_3$　$Q_3 = Ae^{ik_2 x} + Be^{-ik_3 x}$

そこで，$x=x_1$ ，$x=x_2$ における連続の条件

$$x=x_1 \qquad Q_1=Q_2 \qquad Q_{1x}=Q_{2x}$$

$$x=x_2 \qquad Q_2=Q_3 \qquad Q_{2x}=Q_{3x}$$

によって，次のような4つの方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&C\sqrt{x_1}N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)+D\sqrt{x_1}J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)-Ee^{ik_1x_1}=0\\
&C\frac{\omega}{\sqrt{ga}}N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)+D\frac{\omega}{\sqrt{ga}}J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)-iEk_1e^{ik_1x_1}=0\\
-Be^{-ik_3x_2}+{}&C\sqrt{x_2}N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)+D\sqrt{x_2}J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)=Ae^{ik_3x_2}\\
iBk_3e^{-ik_3x_2}+{}&C\frac{\omega}{\sqrt{ga}}N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)+D\frac{\omega}{\sqrt{ga}}J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)=iAk_3e^{ik_3x_2}
\end{aligned}\right\}\text{——⑥}$$

ここで a は斜面の勾配 $\qquad k^2=\dfrac{\omega^2}{gh}$

求めようとする反射率$|R|$ は AとBの比の形で表わせるから，

$$|R|=\left|\frac{B}{A}\right|$$

故に ⑥ 式から，

$$|R|=\left|\frac{B}{A}\right|=\sqrt{\frac{(H+I)^2+(-J+K)^2}{(H-I)^2+(J+K)^2}} \qquad \text{——⑦}$$

⑦式中の H, I, J, K は下記のとおり。

$$H=\frac{\omega^2}{ga}\left\{N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)\cdot J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)-N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)\cdot J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)\right\}$$

$$I=\frac{\omega^2}{ga}\left\{N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)\cdot J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)-N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)\cdot J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)\right\}$$

$$J=\frac{\omega^2}{ga}\left\{N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)\cdot J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)-N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)\cdot J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)\right\}$$

$$K=\frac{\omega^2}{ga}\left\{N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)\cdot J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)-N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_2}\right)\cdot J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)\right\}$$

N_0, N_1, J_0, J_1 の，漸近展開式（たとえば，$J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)$, $N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)$について下に示すと）を用いて

$$J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)=\sqrt{\frac{1}{\pi\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}}}\left\{\cos\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{16\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}}\sin\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}\right)=\sqrt{\frac{1}{\pi\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}}}\left\{\sin\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{16\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}}\sin\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\sqrt{x_1}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

⑦式中の $(H+I)^2$, $(H-I)^2$, $(-J+K)^2$, $(J+K)^2$ を表わせば

$$(H+I)^2=\left(\frac{\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}{\pi\sqrt[4]{x_1x_2}}\right)^2\left\{\frac{1}{16\cdot\frac{\omega^2}{ga}}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}\right)\cos^2\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\right)\right\}$$

$$(-J+K)^2=\left(\frac{\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}{\pi\cdot\sqrt[4]{x_1x_2}}\right)^2\left\{\frac{1}{16\cdot\frac{\omega^2}{ga}}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}\sin^2\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\right)\right)\right\}$$

$$(H-I)^2=\left(\frac{\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}{\pi\sqrt[4]{x_1x_2}}\right)^2\left\{4\sin^2\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\right)-\frac{1}{2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\sin\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\right)\right.$$

$$\times\cos\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\right)+\left(\frac{1}{8\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}\right)^2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}\right)$$

$$\left.\times\cos^2\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\right)\right\}$$

$$(J+K)^2=\left(\frac{\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}{\pi\sqrt[4]{x_1x_2}}\right)^2\left\{4\cos^2\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\right)+\frac{1}{2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\sin\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\right)\right.$$

$$\times\cos\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\right)+\left(\frac{1}{8\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}\right)^2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}\right)$$

$$\times\sin^2\left(2\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\right)$$

となる。上の4つの式を⑦式に代入し，微小な項を省略すると，

$$|R|=\frac{1}{8\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}\cos\left(4\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\right)} \quad \text{———} ⑧$$

そこで，⑧式中の $\cos\left(4\frac{\omega}{\sqrt{ga}}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\right)=-1$ とおき

$$|R|=\frac{1}{8\frac{\omega}{\sqrt{ga}}}\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2}}} \quad \text{———} ⑨$$

よって反射率Rは ⑨ 式によって得られた。

実験値との比較のために，海底勾配 $a\left(=\frac{1}{20}\right)$ を一定として，水深 h_3 を 40cm 45cm 50cm の 3種類について $|R|$ を計算すると，

$h_3=40^{cm}$　　$|R|=0.0448/\frac{l}{L}$

$h_3=45^{cm}$　　$|R|=0.0362/\frac{l}{L}$

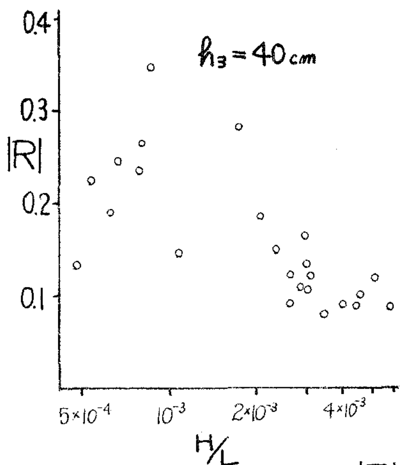
$h_3=50^{cm}$　　$|R|=0.0309/\frac{l}{L}$

══ 実験との比較 ══

実験は中央大学理工学部水理実験室の長さ 50 m，幅 1 m，高さ 1 m の水槽によって行なわれた。実験中の水深は，40 cm，45 cm，50 cm であった。実験波の周期は，10 sec，6.7 sec，5.0 sec，4.0 sec，3.3 sec，波高は，1 cm ～ 10 cm であった。用いた斜面は鋼製の図－1に示す形のもので，高さ 30 cm，底辺長 6 m，勾配が 1/20 である。

反射率は，抵抗線式波高計を用いて測定したものを Healy の方法で算出した。

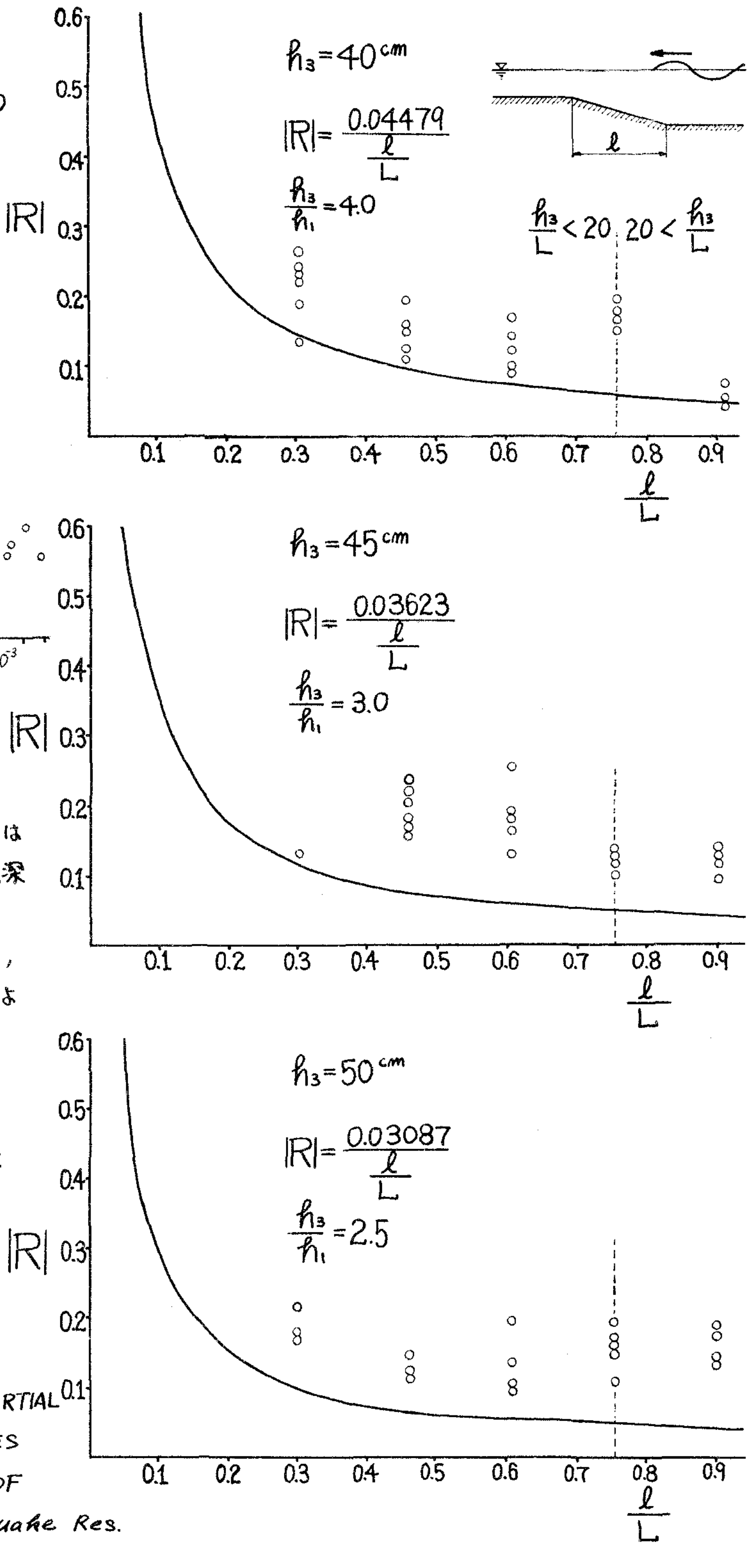
図−2において，実線は理論式から得られる曲線で，○印が実験値を表わす。なお，図−3に，水深が40 cm の場合のみについて波形勾配 H/L と $|R|$ との関係を図示する。



図−3

図−3から H/L と $|R|$ との間には関連性がみられない。また，他の水深の場合にも同様であった。

図−2の理論値と実験値との間に，かなりの差があり，この原因が何によるものか，今のところ不明である。



図−2

付記

この研究に対し，文部省より助成金（研究代表者，東京大学堀川清司教授）をいただいた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

Kinjiro Kajiura : ON THE PARTIAL REFLECTION OF WATER WAVES PASSING OVER A BOTTOM OF VARIABLE DEPTH, Earthquake Res. Inst., pp. 206 ~ 230, 1961.