I －24

変断面吊橋タワーの動的不安定問題

山梨大学工学部　正員　深沢泰晴
山梨大学大学院　学生員　河西晴征

1. はじめに

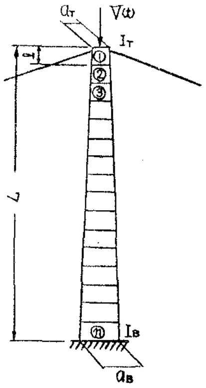
長径間吊橋主塔の設計において　主塔を底部固定，頂部ヒンジとして扱うと従来の設計法に較べ非常にスレンダーに設計されることになる[1),2),3)]。そうした場合主塔は補剛桁の対称振動との関連において動的に不安定になる畏れがあり，それに対しての安全性は充分検討されなければならない[4)]。吊橋主塔の動的不安定問題では一次不安定領域が特に問題であり，実験的にも不安定現象は確認されている[5)]。今回は有限個に分割した変断面主塔モデル対して，不安定領域を算出し[6)]，更に種々の原因で振動エネルギーの消散による振動減衰を考慮した不安定領域の算出を試みた。

2. 変断面の場合の不安定領域

長径間吊橋主塔を図－1に示すようにn個の要素に分割して，長径間吊橋主塔の動的不安定領域を導く。外力Vの動的成分の周期を一定と仮定して次式で表わす。

$$V(t) = V_0 + V_t \cos\theta t \quad \text{------------------ (1)}$$

ここに，V_0は時間に無関係な一定力を表わし，静的釣り合い状態における主ケーブルの塔項における鉛直反力に対応する。又動的周期力を表わす$V_t\cos\theta t$は吊橋補剛桁の一定周期の振動によって生ずる主ケーブルの動的附加張力に対する塔頂での鉛直反力に対応する。このような周期力$V(t)$が吊橋主塔に作用する時，振動問題に対して，回転慣性力及び縦方向慣性力を無視して支配行列方程式は



図－1 吊橋タワーのモデル

$$[M]\{\ddot{v}\} + [K]\{v\} - [S]\{v\} = 0 \quad \text{------------ (2)}$$

で与えられ，$\{v\}$　は一般座標，$[M]$は質量マトリックス，$[K]$は剛性マトリックス，$[S]$は安定マトリックスである。$[S]$は軸力が作用した場合に生ずる影響項であり，(1)式で与えられる$V(t)$の関数であり次式で表わされる。

$$[S] = \alpha V^*[S_0] + \beta V^* \cos\theta t\,[S_t] \quad , V_0 = \alpha V^* \ , V_t = \beta V^* \quad \text{----------------- (3)}$$

ここに，α, βは静的座屈荷重V^*に対するV_0，V_tの割合を表わす係数である。(3)式を(2)式へ代入して支配行列方程式はMathieu－Hill 型方程式で次式となる。

$$[M]\{\ddot{v}\} + [[K] - \alpha V^*[S_0] - \beta V^* \cos\theta t\,[S_t]]\{v\} \quad \text{------------------- (4)}$$

(4)式において安定及び不安定の境界は$2\pi/\theta$及び$4\pi/\theta$の周期を持つ解の存在条件より決定でき，そのうち長径間吊橋主塔の動的不安定問題で重要な一次不安定領域を求める。変位ベクトルとして$\{v\}$を

$$\{v\} = \{\sum_{k=1,3,5\cdots}^{\infty} (a_k \sin\frac{k\theta t}{2} + b_k \cos\frac{k\theta t}{2})\} \quad \text{------------------ (5)}$$

と仮定して，(4)式へ代入し，第一次近似をとって不安定領域を与える次式を得る。

$$\left|[K] - (\alpha \pm \frac{\beta}{2}) V^*[S] - \frac{\theta^2}{4}[M]\right| = 0 \quad \text{------------------ (6)}$$

単位要素に対しての質量マトリックス$[m]$，剛性マトリックス$[k]$，スタビリティマトリックス$[s]$　は吊橋主塔を図－1のように橋軸方向のみに直線的に断面が変化する場合を考えて，等断面における$[m]$，$[k]$にその影響係数として(H)，(F)を考える。即ちn番目の要素の橋軸直角方向軸に対しての断面二次モーメントは要素の中央で代表させ，又n番目の質量は要素中央で代表する面積を用いて算出する。

$$\left.\begin{aligned} H &= 1 + kl\left(i + \tfrac{1}{2}\right) / a_T \\ F &= \left\{ a_T + kl\left(i + \tfrac{1}{2}\right) \right\}^3 / a_T^3 \end{aligned} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \right\} \quad \text{-------------} \quad (7)$$

ここに, $k = (a_B - a_T)/L$　, $L = \sum_{i=1}^{n} l_i$　, a_B, a_T;主塔底部, 頂部の橋軸方向長さ

よって変断面の場合の$[k]$, $[m]$, 及び$[s]$は結局

$$[k] = \frac{EI_T}{l^3} F \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad [m] = \frac{m_1 \omega^2 l}{630} H \begin{bmatrix} 234 & 33 & 81 & -19.5 \\ 33 & 6 & 19.5 & -4.5 \\ 81 & 19.5 & 234 & -33 \\ -19.5 & -4.5 & -33 & 6 \end{bmatrix}, \quad [s] = V \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

ここに, I_Tは主塔頂部における橋軸直角方向軸に関する断面二次モーメント, m_1は図－1での一番目要素の質量を表わす。

3. 減衰を考慮した不安定領域

減衰を考慮した場合の支配行列方程式は(2)式に減衰項を加えて次式のようになる。

$$[M]\{\ddot{v}\} + [[K] - \alpha V^*[S_0] - \beta V^* \cos\theta t [S_t]]\{v\} + [C]\{\dot{v}\} = 0 \quad \text{------------} \quad (8)$$

上式に減衰を考慮しない場合と同様, 変位ベクトル$\{v\}$を(5)式のように仮定して(8)式へ代入すると結局次式のようになる。

$$\begin{aligned} &-[M]\left\{ a_1 \frac{\theta^2}{4} \sin\frac{\theta t}{2} + b_1 \frac{\theta^2}{4} \cos\frac{\theta t}{2} + a_3 \frac{9\theta^2}{4} \sin\frac{3\theta t}{2} + b_3 \frac{9\theta^2}{4} \cos\frac{3\theta t}{2} + a_5 \frac{25\theta^2}{4} \sin\frac{5\theta t}{2} + b_5 \frac{25\theta^2}{4} \cos\frac{5\theta t}{2} \right\} \\ &+ [[K] - \alpha V^*[S_0] - \beta V^*[S_t]]\left\{ a_1 \sin\frac{\theta t}{2} + b_1 \cos\frac{\theta t}{2} + a_3 \sin\frac{3\theta t}{2} + b_3 \cos\frac{3\theta t}{2} + a_5 \sin\frac{5\theta t}{2} + b_5 \cos\frac{5\theta t}{2} \right\} \\ &+ [C]\left\{ a_1 \frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta t}{2} + b_1 \frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta t}{2} + a_3 \frac{3\theta}{2} \sin\frac{3\theta t}{2} + b_3 \frac{3\theta}{2} \cos\frac{3\theta t}{2} + a_5 \frac{5\theta}{2} \sin\frac{5\theta t}{2} + b_5 \frac{5\theta}{2} \cos\frac{5\theta t}{2} \right\} = 0 \quad \text{---} \quad (9) \end{aligned}$$

(9)式の $\sin\frac{\theta t}{2}$, $\sin\frac{3\theta t}{2}$, $\sin\frac{5\theta t}{2}$, $\cos\frac{\theta t}{2}$, $\cos\frac{3\theta t}{2}$, $\cos\frac{5\theta t}{2}$ の係数を零とおくと６個の代数方程式が得られ, a_1, a_3, a_5, b_1, b_3, b_5の任意性より, 次の行列式が得られる。

(10)式の行列式の中央の破線の部分に注目して取り出すと(11)式のようになり, 減衰を考慮した場合の不安定領域を与える。(11)式からわかるように減衰を考えない場合のマトリックスの外に対角項に減衰の項が入ってくる。減衰項の減衰マトリックス$[C]$の定量的評価及び実際数値計算例は講演当日にゆづる。

$$\begin{vmatrix} [K]-\alpha V^*[S_0] - \frac{25\theta^2}{4}[M] & -\frac{\beta}{2}V^*[S_t] & & & & -\frac{5}{2}\theta[C] \\ -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] & [K]-\alpha V^*[S_0] - \frac{9}{4}\theta^2[M] & -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] & & -\frac{3}{2}\theta[C] & \\ & -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] & \boxed{\begin{matrix} [K]-\alpha V^*[S_0] + \frac{1}{2}\beta V^*[S_t] - \frac{1}{4}\theta^2[M] & -\frac{1}{2}\theta[C] \\ \frac{1}{2}\theta[C] & [K]-\alpha V^*[S_0] - \frac{1}{2}\beta V^*[S_t] - \frac{1}{4}\theta^2[M] \end{matrix}} & & & \\ & & & & -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] & \\ & \frac{3}{2}\theta[C] & & -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] & [K]-\alpha V^*[S_0] - \frac{9}{4}\theta^2[M] & -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] \\ \frac{5}{2}\theta[C] & & & & -\frac{1}{2}\beta V^*[S_t] & [K]-\alpha V^*[S_0] - \frac{25}{4}\theta^2[M] \end{vmatrix} = 0 \quad \text{-------------} \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} [K] - \alpha V^*[S_0] + \frac{1}{2}\beta V^*[S_t] - \frac{1}{4}\theta^2[M] & -\frac{1}{2}\theta[C] \\ \frac{1}{2}\theta[C] & [K] - \alpha V^*[S_0] - \frac{1}{2}\beta V^*[S_t] - \frac{1}{4}\theta^2[M] \end{vmatrix} = 0 \quad \text{---------} \quad (11)$$

参考文献　1) 深沢：土木学会講演会概要, 昭和43年　2) 加藤茂之：山梨大学工学部卒業論文　昭和43年

3) K. Kloppel, 他：Stalbau　1965　4) 平井・伊藤：土木学会講演会概要, 昭和40年

5) 深沢・河西：土木学会講演会概要, 昭和50年　6) J. E. Brown, 他：Finite Element Solusion to Dynamic Stability of Bars. AIAA Journal. JULY 1968.　7) V. V. Bolotin : The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden - Day, 1964