I－5　動的問題における数値計算法の精度について

○ 長野高専　正会員　服部秀人
東京都立大学　同上　国井隆弘

1. まえがき

動的外力に対する応答問題を扱う場合、微分方程式を数値的に解く必要がしばしば生ずる。その方法には、ルンゲ・クッター法，Newmark's β法等いくつか考えられるが、これらの方法で得られる解が理論解とどの程度の差を示すものなのか、またお互いにどのような違いを見せるのか、について各種の入出力関係のもとに明らかにしておくことは、実際に数値計算を行なう際に有用であろう。

数値計算上重要な因子である計算時間刻みについては、国井，鹿又の報告[1]がある。本報告では、1自由度系に関して、ルンゲ・クッター法，Newmark's β法（線形加速度法を含む），差分法を選び、系の固有周期を1.0秒，計算時間刻みを $1/100$，$1/50$ 秒，入力周期と減衰の有無をパラメーターとして、理論解と比較検討したものである。

2. 方法

1自由度系の固有振動数を ω_0 とし、正弦波地動による外力を受ける系の運動方程式を次式とする。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\sin\omega t \qquad (2\cdot1)$$

ここで、x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$ はそれぞれ応答の変位，速度，加速度を意味し、h は減衰定数，ω は外力の円振動数である。系の固有周期を T_0（$=2\pi/\omega_0$），外力の周期を T（$=2\pi/\omega$），系と外力の振動数比を λ（$=\omega/\omega_0$）とすれば、計算方法は以下に列記する如くとなる。

（1.） 外力のタイプは、λ = 0.2，0.3，0.4，0.5，0.55，0.6，0.65，0.7，0.75，0.8，0.85，0.9，0.95，1.0，1.05，1.1，1.2，1.3，1.4，1.5，1.75，2.0，2.5，3.0，4.0　の25種類の正弦波とする。

（2.） 減衰定数は、h = 0.0，0.02，0.05，0.1，0.4　の5種類とする。

（3.） 外力の継続時間は、$\lambda < 1.0$ の場合 $t = 10\cdot T_0/\lambda$，$\lambda \geqq 1.0$ の場合 $t = 10\cdot T_0$ とし、応答の卓越波形が10波得られるようにする。

（4） 比較の対象は、変位と加速度の絶対最大値及び応答の卓越波形における10波目のピークまでのそれぞれのパワー密度とする。

以上の方法により得られる結果は任意の T_0 に対して適用出来ることとなる。

3. 数値計算法

計算法は前述した如く、差分法，ルンゲ・クッター法，Newmark's β法（$\beta = 1/6, 1/4, 1/8$）の3種である。以下にこれらの方法を簡単に述べる。

（1.） 差分法

$$\dot{x}_n = (x_{n+1} - x_n)/\Delta t \qquad (3\cdot1)$$

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})/\Delta t^2 \qquad (3\cdot2)$$

上式を(2・1)式へ代入する。

(2.) ルンゲ・クッター法

1階の微分方程式を

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad (3\cdot3)$$

とするとき、

$$x_{n+1} = x_n + (M_0 + 3M_2)/4 + O(\Delta t^4) \qquad (3\cdot4)$$

ただし、

$$M_0 = f(x_n, t_n)\cdot\Delta t$$

$$M_1 = f(x_n + M_0/3,\ t_n + \Delta t/3)\cdot\Delta t$$

$$M_2 = f(x_n + \tfrac{2}{3}M_1,\ t_n + \tfrac{2}{3}\Delta t)\cdot\Delta t$$

以上が時間刻み巾の4乗のオーダーの精度を有するルンゲ・クッタ式であり、これを(2・1)式に適用する。[2]

(3.) Newmark's β法

Δt時間内の加速度の変化に従ってβの値を変えるもので、β = 1/6 とおくと線形加速度法と同一の式となる。本報告では、β = 1/6, 1/4, 1/8 である。

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\cdot\dot{x}_n + (\tfrac{1}{2} - \beta)\Delta t^2\ddot{x}_n + \beta\cdot\Delta t^2\ddot{x}_{n+1} \qquad (3\cdot5)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \tfrac{1}{2}\Delta t\,\ddot{x}_n + \tfrac{1}{2}\Delta t\,\ddot{x}_{n+1} \qquad (3\cdot6)$$

上式を(2・1)式に代入する。[3]

4. 結果

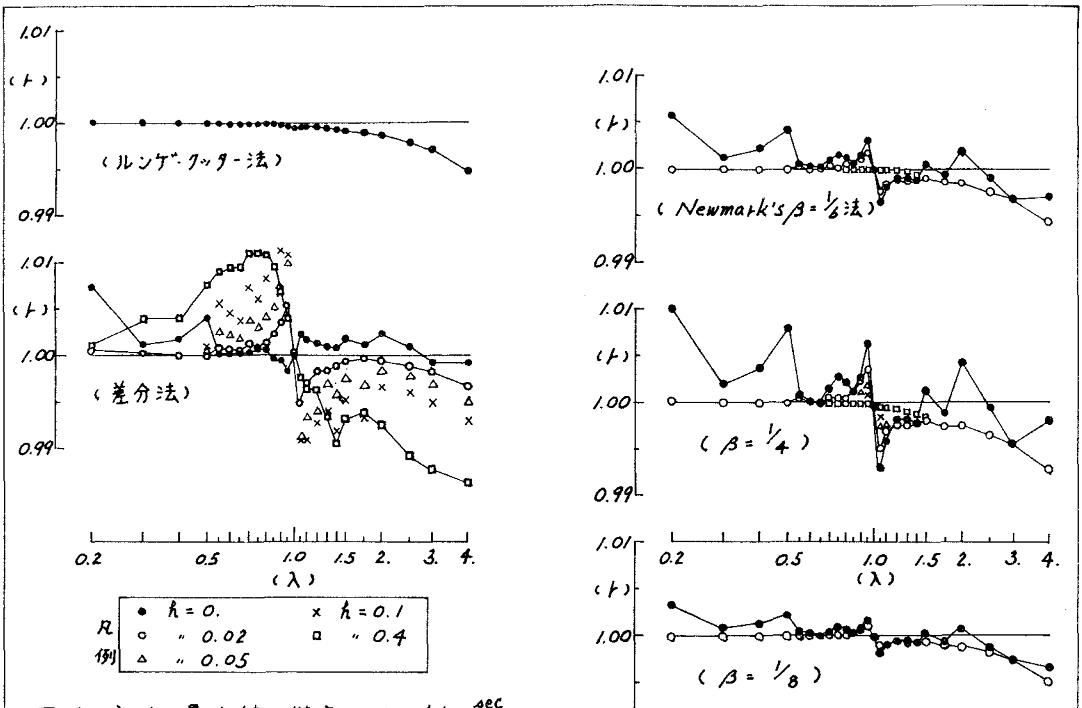

図-1 変位の最大値の精度($\Delta t = 1/100$ sec)

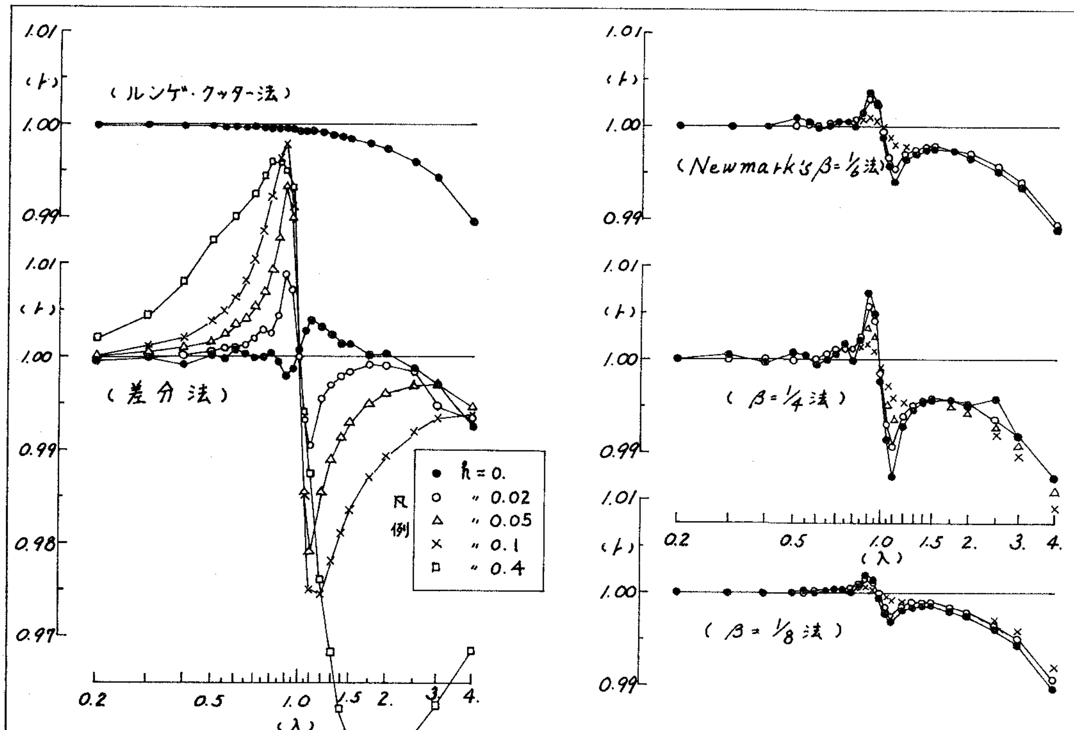

図-2 変位のパワー密度の精度($\Delta t = 1/100^{sec}$)

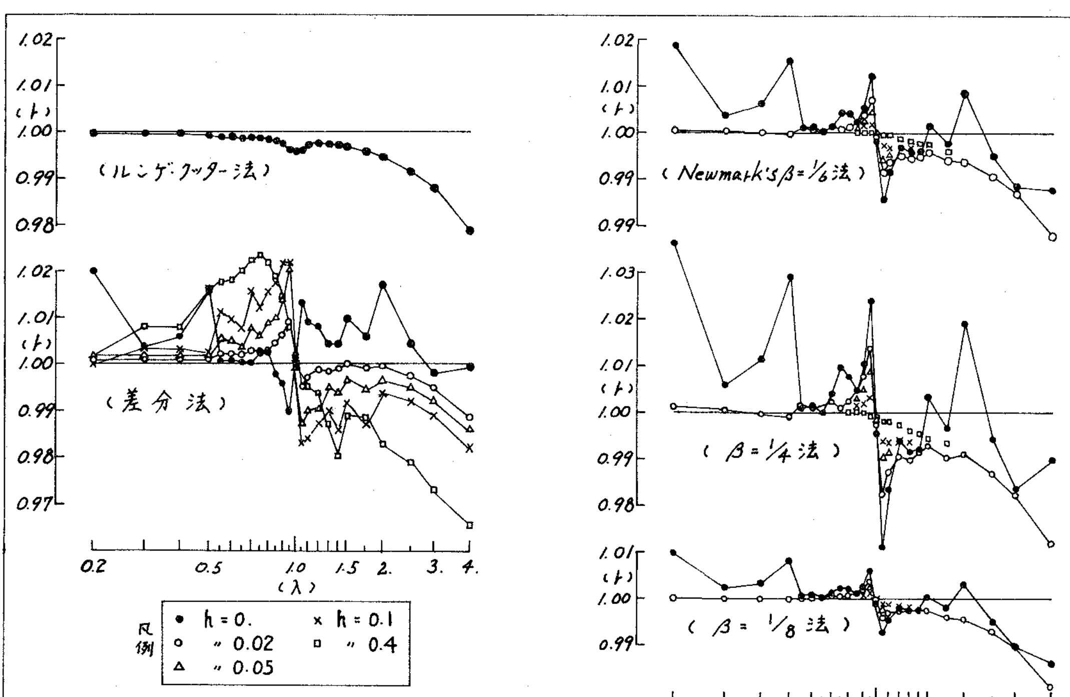

図-3. 変位の最大値の精度($\Delta t = 1/50^{sec}$)

計算結果を図1～4に示す。縦軸に理論解との比ト を、横軸にλ（＝ω/ω_0）をとり、各hごとにプロットしてあるが、値のかなり接近しているものについては記載してない。加速度については、差分法を除いて変位の結果と大きな相違がないので図は省略した。

図1～4から言えることは、

1. 各計算法ともλ＞1の範囲で小さめの値（危険側）を示す傾向がある。
2. ルンゲ・クッタ法を除き、λ＝1（共振）で良い精度を示す。
3. 減衰hの有無による相違は、ルンゲ・クッター法では微小であるが、差分法ではh大なるほど精度悪く、Newmark's β法では逆にh大なるほど精度良く、それらの傾向はλ＝1附近で顕著である。ただしパワー密度における$\beta=1/4$法については他のβ法と多少異っている。
4. β法3種のうちでは、$\beta=1/8$法が最も精度良く、$\beta=1/4$法が最も悪い。$\beta=1/6$（線形加速度）法はその中間にある。hが大変小さく、かつ弾性構造物の場合には、$\beta=1/12$のとき良い精度を示すという報告がある(5)。
5. 最大値とパワー密度とで比較すると、ルンゲ・クッター法では双方とも同様であるが、β法では$h=0.$の場合かなり異った様相を示す。
6. 計算時間刻みについては、$\Delta t=1/100$秒に対し、1/50秒でもかなり精度の良い場合が多い。

謝辞

長野高専のFACOM 230-25による本計算に際し、同校機械工学科風間悦夫，堀内征治両教官ならび土木工学科小林清，小林一夫両技官には懇切な御指導、御協力を頂き、ここに謝意を表します。

参考文献

(1) 国井，鹿又「動的問題における数値計算法の精度に関する一考察」，昭48土木学会関東支部年次研究発表会概要集，(2) 田治見「建築振動学」コロナ社，(3) 小坪「土木振動学」森北出版，(4) Newmark, "A method of computation for structural dynamics" ASCE, EM3, July, 1959, (5) Chan, Cox, and Benfield, "Transient analysis of forced vibration of complex structural-mechanical systems" J. of the R.A.S, vol. 66, 1962,

図-4. 変位のパワー密度の精度（$\Delta t = 1/50$ sec）