

防衛大学校土木工学教室

正員 石川 信隆

〃 〃

〇正員 中村 弘

〃 〃

正員 岡元 北海

1. 緒言 曲げの他に軸力による影響が大きく作用する構造物に対しては慣用の塑性理論に基づく骨組構造物の最適塑性設計法をそのまま適用できないということが指摘されている。そのため従来軸力による全塑性モーメントの低下や軸力と水平変位による付加曲げモーメントの影響(以下P-Δ効果とよぶ)を考慮した最適塑性設計法がいくつか提案されてきた。その多くは下界定理に基づいているが^{1),2)}軸力による部材のたわみ性的変化を考慮したものは見当たらない。一方上界定理に基づく方法もある限定した崩壊機構を対象としており^{3),4)}どのような崩壊機構を一体何個選んだらよいか疑問点が残っている。本報告は、このような問題点を解決するために先⁵⁾のすべての崩壊機構を考慮した曲げ構造物を対象とする最適塑性設計法(以下一次最適塑性設計法とよぶ)をさらに拡張して二次的影響、即ち(1)軸力による全塑性モーメントの低下、(2)P-Δ効果および(3)軸力による部材のたわみ性的増加を考慮した最適塑性設計いわゆる二次最適塑性設計法を提示するものである。その手法は上界定理に基づきある指定した終局荷重係数(安全率)より小さな荷重係数のもとでいかなる二次崩壊機構(上記二次的影響を考慮した崩壊機構)も生じないよう構造物全体の重量を最小にする最適塑性設計モーメントを決定せんとするものである。設計にあたり二次的影響を考慮する他に、次の仮定を用いた。(i)塑性ヒンジは断面に集約されるものとする。(ii)せん断力、ねじりおよび面外変形は考慮しない。(iii)荷重は単調比例増加とする。(iv)部材の伸縮およびはり部材の軸力は考慮しない。

2. 二次最適塑性設計の基本式 先に報告した一次最適塑性設計の基本式に上記二次的影響を考慮すれば、二次最適塑性設計の基本式は一般に非線型計画法(NLP)の問題⁶⁾となるが、二次的影響による諸量(η_k, e_{si}, E_{sk})を既知と仮定すれば次のような線型計画法(LP)の問題として表わされる。

未知の変数: $M_{pk} \ (k=1, 2, \dots, n)$

目的関数: $Z = \sum_{k=1}^n M_{pk} L_k \longrightarrow \min.$ (1a)

制約条件: $\sum_{i=1}^n a_{ik} \eta_k M_{pk} \geq \lambda_0 (e_i + e_{si}) \quad (i=1, 2, \dots, g)$ (1b)

$\sum_{k=1}^n b_{rk} \eta_k M_{pk} \geq \lambda_0 (E_r + E_{sk}) \quad (r=1, 2, \dots, p-g)$ (1c)

ここに式(1a)は構造物全体が最小重量となることを意味し、式(1b), (1c)は所要の安全性(λ_0)が確保されるまでそれぞれ基本構架および組合せ構架(いずれも二次的影響を考慮した崩壊構架で、はり構架では通常の曲げ構架になる)のうちのいずれでも崩壊しないことを保証している。なお、式(1)中の記号内容は次のとおりである。 Z =あるスケールでの構造物の全重量; M_{pk} =未知の設計全塑性モーメント; L_k = M_{pk} が一定である間の部材長; k =設計変数を示す記号; n =設計変数 M_{pk} の全数; i =基本構架の数を示す記号で基本層構架から数えはじめる; r =組合せ構架の数を示す記号; a_{ik}, b_{rk} =基本構架*i*および組合せ構架*k*において M_{pk} に関与する仮想回転角の係数; e_i, E_r =基本構架*i*および組合せ構架*r*における作用外力荷重による一次仕事量; e_{si}, E_{sk} =基本層構架*i*および組合せ構架*k*におけるP-Δ効果による二次仕事量; η_k =設計変数 M_{pk} に関与する部材の軸力による全塑性モーメントの低下を示す係数の総和 $= \sum_{r=r_{k-1}+1}^{r_k} \eta_r$; η_r =部材*r*の軸力による全塑性モーメントの低下を示す係数で次式で表わされる⁶⁾

$$\eta_r = \frac{M_{pcr}}{M_{pr}} = \begin{cases} 1; & (0 \leq N_r/N_{Yr} \leq 0.15) \\ 1.18(1 - N_r/N_{Yr}); & (0.15 \leq N_r/N_{Yr} \leq 1.0) \end{cases} \quad (2)$$

ここに N_{Yr} =部材*r*の降伏軸力 $= A_r \cdot \sigma_y$; N_r =部材*r*の軸力; M_{pcr} =部材*r*の軸力を考慮した全塑性モーメント;

M_{pr} = 部材 r の全塑性モーメント； p = すべての可能な二次崩壊機構の全数； g = 節点機構を除く基本機構の全数； $p-g$ = 組合せ機構の全数； λ_0 = 指定する終局荷重係数； r_h = 設計変数 M_{pr} に関する部材の最大部材番号 ($r_0=0, r_h=h$)； r = 部材の数を示す記号である。

さて式(1)の解法上において次の二つの問題点がある。オ一は、当初 r_h および $P-\Delta$ 効果による二次仕事量 e_{si} 、 E_{sh} が未知であるゆえ簡単な構造物でもこのままでは解くことが不可能であり、オニは、仮に r_h, e_{si}, E_{sh} が既知としても複雑な構造物に対して $(p-g)$ 個のすべての可能な組合せ機構を手作業で探し出すことは困難である。よって以下に述べる二次崩壊荷重解析、二次終局変形解析および軸力の算定式を用いて式(1)を繰り返し試算により解くこととなる。なお式(1)で $r_h=1, e_{si}=E_{sh}=0$ とおけば一次最適塑性設計の基本式となる。

3. 二次崩壊荷重解析の基本式 いま平面ラーメンの荷重係数 λ と水平変位 Δ との関係は $P-\Delta$ 効果および軸力による全塑性モーメントの低下を考慮すれば、図-1 のようになることはよく知られている⁶⁾。ここで λ_p は剛塑性理論に基づく崩壊荷重係数（一次崩壊荷重係数）で、 λ_f は $P-\Delta$ 効果による二次崩壊機構の形成による崩壊荷重係数か、または二次崩壊機構が形成される前の不安定現象による安定限界荷重係数を示し、 λ_m は不安定現象が生じた後の二次崩壊機構の形成による崩壊荷重係数を示す。この λ_f または λ_m のいずれか（これを統一して λ_h とする）を求めるいわゆる二次崩壊荷重解析は、式(1)と同じく二次的諸量を既知とすれば次のLP問題として定式化される⁷⁾。

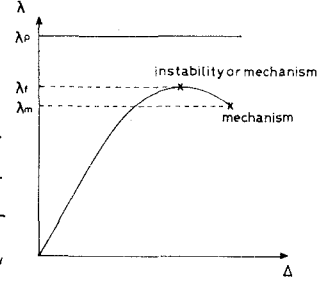


図-1 荷重-変形曲線

未知の変数： $\theta_{kj} (j=1, 2, \dots, S)$ ； $\tau_{ki} (i=1, 2, \dots, m)$

目的関数： $\lambda_h = \sum_{j=1}^S M_{pcj} \theta_{kj} \longrightarrow \min.$ (3a)

制約条件： $\theta_{kj} - \sum_{i=1}^m \tau_{ki} \theta_{ij} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, S)$ (3b)

： $\sum_{i=1}^m \tau_{ki} (e_i + e_{si}) = 1$ (3c)

ここに式(3a)は組合せ機構における塑性ヒンジのなす内部仕事量が最小となることを示し、式(3b)は組合せ機構における塑性ヒンジ点 j の相対回転角 θ_{kj} が基本機構の仮想回転角 θ_{ij} の一次結合となることを意味し、式(3c)は組合せ機構において $P-\Delta$ 効果を含む作用荷重のなす仕事の総和が1に等しいことを示している。なお式(3)の記号の内容は次の通り。 j = 節点の数を示す記号； S = 全節点数； m = 基本機構の全数 = $S-N$ ； N = 不静不定次数； M_{pcj} = 節点 j の軸力を考慮した全塑性モーメント； θ_{kj} = 組合せ機構における節点 j の仮想回転角の係数； θ_{ij} = 基本機構 i における節点 j の仮想回転角の係数； τ_{ki} =

基本機構 i が組合せ機構に關与する割合を示す係数。よって式(3)では軸力を考慮した全塑性モーメント M_{pcj} 、基本機構の相対回転角 θ_{ij} および外力仕事 e_i, e_{si} を与えて、未知の組合せ機構を定義する θ_{kj} および係数 τ_{ki} については二次崩壊荷重係数 λ_h を決定することになる。なお式(3)で、 $M_{pcj} = M_{pj} (j=1, 2, \dots, S)$ および $e_{si} = 0 (i=1, 2, \dots, m)$ とおけば、一次崩壊荷重解析になる。

4. 二次終局変形解析の基本式 1. で述べた二次的影響を考慮した二次崩壊荷重係数 λ_h における変形解析すなわち二次終局変形解析は、次のような二次計画法(QP)の問題として表わされる⁷⁾。

未知の変数： $\theta_j (j=1, 2, \dots, S)$ ； $M_j (j=1, 2, \dots, S)$ ； $T_i (i=1, 2, \dots, m)$

目的関数： $U = \sum_{j=1}^S (M_{pcj} - |M_j|) \theta_j \longrightarrow \min.$ (4a)

制約条件： $\theta_j - \sum_{i=1}^m T_i \theta_{ij} + \left(\frac{L}{6EI}\right)_{jd} (2M_j + M_d) + \frac{N_{jd} L_{jd}^2}{(EI_{jd})^3} \left(\frac{1}{45} M_j + \frac{7}{360} M_d\right) = 0$ (4b)

($j=1, 2, \dots, S$)

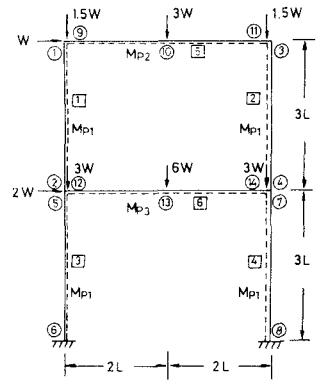


図-2 構造および荷重形式

$$\therefore \sum_{j=1}^S M_j \theta_{ij} = \lambda_e (e_i + e_{si}) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (4c)$$

$$\therefore -M_{pcj} \leq M_j \leq M_{pcj} \quad (j=1, 2, \dots, S) \quad (4d)$$

ここに式(4a)は、節点 j の塑性回転角 θ_j が式(4d)の降伏条件の等号を満足したのちに発生するという正負照号条件を意味し、式(4b)は、部材の軸力によるたわみ性の増加を考慮した節点 j における回転角の適合条件を示し、式(4c)は、 $P-\Delta$ 効果を考慮した独立な平衡条件を表わし、さらに式(4d)は、節点 j の曲げモーメントが軸力を考慮した全塑性モーメントを越えないという降伏条件を表わしている。また、 θ_j =節点 j の塑性回転角； T_i =基本層構 i に対応する構造物の部材回転角および節点回転角を示し、これより λ_e のもとにおける i 層目の相対水平変位 δ_i が $\delta_i = T_i / L_i$ ($i=1, 2, \dots, H$)としてえられる。ただし、 L_i = i 層目の柱部材の長さ； H =基本層構の全数 ($\leq m$)； N_{jd} =部材 jd の作用軸力； $(EI)_{jd}$ =部材 jd の曲げ剛性； M_j =節点 j の作用曲げモーメントを示す。ここで式(4)を解くには、式(3)の二次崩壊荷重解析を用いてQPの問題をLPの問題に変換することで可能となる⁷⁾。なお式(4)で、 $M_{pcj} = M_{pj}$ 、 $N_{jd} = 0$ 、 $e_{si} = 0$ とおけば一次終局変形解析の基本式になる。

5. 軸力および $P-\Delta$ 効果による二次仕事量の算定 式(4)を解けば各節点 j の曲げモーメント M_j がえられこれより部材 r の軸力 N_r が以下のように求められる。いま曲げと軸力を考慮した基本層構⁸⁾(これを $M-N$ 基本層構とよぶ)を考え、柱部材 r に独立な仮想変位 Δ_r を与えれば、仮想仕事の原理から次式がえられる。

$$\sum_{j=1}^S M_j \theta_{rj} + N_r \Delta_r = \lambda_e e_r \quad (r=1, 2, \dots, C_H)$$

ここに、 e_r = $M-N$ 基本層構における作用荷重による外力仕事； C_H =柱部材の全数； Δ_r = $M-N$ 基本層構 r における r 部材の仮想変位の係数； θ_{rj} = $M-N$ 基本層構 r における節点 j の仮想回転角の係数である。上式より $\Delta_r \neq 0$ であるゆえ柱部材 r の軸力 N_r が次のように求められる。

$$N_r = (\lambda_e e_r - \sum_{j=1}^S M_j \theta_{rj}) / \Delta_r \quad (r=1, 2, \dots, C_H) \quad (5)$$

次に基本層構 i における $P-\Delta$ 効果による二次仕事量 e_{si} を求める。これは作用荷重レベルの量であるので崩壊荷重レベルでは $\lambda_e e_{si}$ となり、一方式(4)よりえられる i 層目の相対水平変位 δ_i と式(5)よりえられる i 層目に関与する柱部材の軸力の総和 $\sum_{r=C_{i-1}+1}^{C_i} N_r$ を掛けたものは崩壊荷重レベルの二次仕事量である。よって両者を等置して e_{si} を求めれば、

$$e_{si} = (\delta_i \cdot \sum_{r=C_{i-1}+1}^{C_i} N_r) / \lambda_e \quad (i=1, 2, \dots, H) \quad (6a)$$

ここに、 C_i = i 層目に関与する柱部材の最大部材番号 ($C_0=0$)である。また組合せ層構 e における二次仕事量 E_{se} は基本層構 i における二次仕事量 e_{si} の一次結合として表わされる。

$$E_{se} = \sum_{i=1}^H t_{ei} \cdot e_{si} \quad (e=1, 2, \dots, p-8) \quad (6b)$$

ここに、 t_{ei} =式(3)で定義した量と同じである。

6. 二次最適塑性設計法 本設計法の骨子はまず二次的影響を無視した一次最適塑性設計を行なったのちに二次的影響を考慮した設計に移行し、所要の安全性が確保されると同時に応力および変形等の諸値が収れんするまで繰り返す計算手順となる。以下図-2に示す2層1スパンラーメン($SS41$, $\sigma_y = 2.4 \text{ t/cm}^2$, $E = 2.1 \times 10^4 \text{ t/cm}^2$, $W = 2.5 \text{ t}$, $L = 150 \text{ cm}$)について説明する。ただし、安全率 $\lambda_0 = 1.8$ とする。まず図-3に示す8個の基本層構($m = S - N = 14 - 6 = 8$)および図-4の4個の $M-N$ 基本層構を入力データとして与える。次に、二次的諸量を無視した上で、図-3の基本層構のうち(1)(2)(3)(4)のみを当初の設計の制約条件として繰り返す。

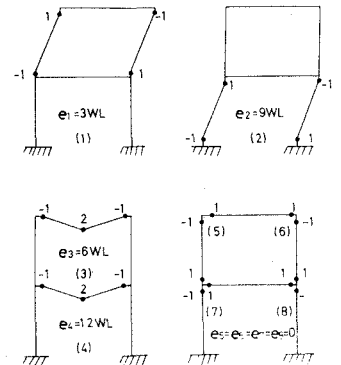


図-3 基本層構

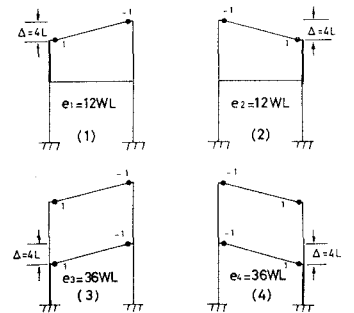


図-4 $M-N$ 基本層構

次最適塑性設計を $\lambda_k \geq \lambda_0$ になるまで行なう。その結果は図-5の $k=1, 2, 3, 4$ の崩壊モードおよび図-6の点線がえられる。ここでえられた $M_p h$ を用いて部材の降伏軸力 $N_{yr} = A_r \sigma_y$ および部材の曲げ剛性 $E I_r$ ($r=1, 2, \dots, k$) を決定する。即ち、一般のH形鋼に対する部材 r の全塑性モーメント M_{pr} と断面二次モーメント I_r および断面積 A_r との関係式として次式を用いる⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \text{柱: } I_r &= (M_{pr} / 0.78 \sigma_y)^{4/3} \\ A_r &= 0.80 (M_{pr} / 0.78 \sigma_y)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{はり: } I_r &= (M_{pr} / 0.58 \sigma_y)^{4/3} \\ A_r &= 0.58 (M_{pr} / 0.58 \sigma_y)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

ただし、 $M_{pr} = M_p h$ ($r = r_{k-1} + 1, \dots, k$) である。次に、式(7a), (7b)を用いて式(4)の終局変形解析を行ない、式(5), (6a), (6b)および式(2)より部材軸力 N_r 、二次的諸量 $E s_i$, $E s_k$ および η_r を算定し、これらを制約条件に考慮した式(1)の二次最適塑性設計を行なう。以下、 $\lambda_k \geq \lambda_0$ および $\lambda_k \equiv \lambda_{k-1}$ が満足されるまで式(1)の設計と式(3), (4)の解析を繰り返すことになる。その結果は図-5の $k=5, 6, \dots, 10$ の二次崩壊モードおよび図-6の実線のようなになる。なお、表-1に繰り返し設計・解析結果を詳細に示した。最終の設計結果は表-2のようになり一次設計に比し1層目のはりの強度は減少しているが、柱および2層目のはりの強度がそれぞれ増加し、全鋼重量は約26%増加していることが認められる。

7. 結言 本研究は既往の上界定理に基づく繰り返し二次最適塑性設計法を、二次的影響を考慮した二次最適塑性設計法に拡張したもので軸力の影響が大きく作用する高層ラーメンなどの最適塑性設計に適しているといえる。本法によれば、独立な基本枠構およびM-N基本枠構を入力データとして与えるだけで一連のLP問題として解くことが可能で完全に自動化されたプログラムにより容易にしかも迅速に解がえられることが判明した。

参考文献

- 1) Nakamura, Y & Little, R.N., "Plastic Design Method of Multi-Storey Planar Frames with Deflection Constraints", MIT Report R68-12, March 1968
- 2) Horne, M.R. & Morris, L.J., "Optimal Design of Multi-Storey Rigid Frames", University of Wales at Swansea Conference, January 1972
- 3) Heyman, J., "A approach to the Design of Tall Steel Buildings," Proc. ICE, Vol. 17, December 1960
- 4) Stevens, L.K., "Control of Stability by Limitation of Deformations," Proc. ICE, Vol. 28, July 1964
- 5) Ishikawa, N., "Iterative optimal plastic Design of Steel Frames", Proc. JSCE, No. 237, May 1975
- 6) Ch. Maassonnet, "Tokyo Seminar on Some European Contributions to the Design of Metal Structures, with Emphasis on Plasticity and Stability," Dept. of Civil Engr., Nagoya University, 1974
- 7) Baset, S.B. & Grinson, D.E., "Second-Order Collapse Load Analysis: LP Approach," Jour. of Struct. Div., ASCE, Vol. 99, ST 11, November 1973
- 8) Cohn, M.Z. & Rafay, T., "Collapse Load Analysis of Frames Considering Axial Forces," Jour. of Engr. Mech. Div., ASCE, Vol. 100, EM 4, August 1974
- 9) 田中尚, 中村雄治共著 コンピュータによる構造工学講座 II-7-B 「建築構造物の自動設計と最適設計」1973, 培風館

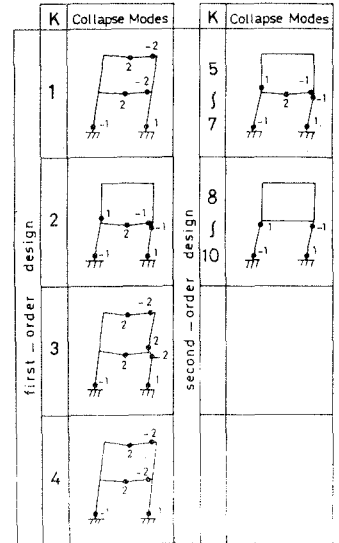


図-5 崩壊枠構

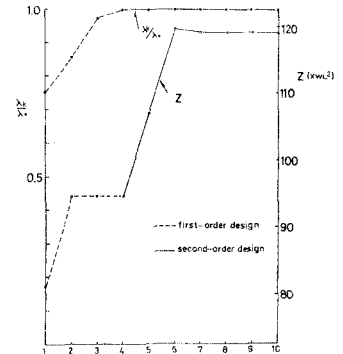


図-6 崩壊枠構長に対する荷重係数比 (λ_k / λ_0)

	K=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Design	M_{max}	4050	4050	4050	4050	5008	5852	5769	5793	5793
	M_{p2}	2700	6075	2700	3375	4622	5171	5195	5204	5206
	M_{p3}	5400	3400	8775	8100	7122	7164	7200	7200	7200
	Z (mm)	81000	94500	94500	94500	107068	118559	118050	119135	119143
Analysis	λ_k	1.350	1.543	1.755	1.800	1.800	1.800	1.800	1.800	1.800
	$N_1(k)$		11813	8895	7322	7264	7240	7236	7236	7236
	N_2			15188	18305	19678	19737	19760	19764	19765
	N_3				32063	31390	29613	29764	29740	29734
	N_4					48938	48611	51087	51237	51260
	δ_1					30791	12516	13876	14037	14068
	δ_2						7918	23505	24809	25043
	δ_3							1000	1000	1000
	δ_4								1000	1000
	δ_5									1000

表-1 繰り返し設計・解析結果

Design phases	M_{p1}/W_L	M_{p2}/W_L	M_{p3}/W_L	Z/W_L^2
(a) first-order	4050	3375	8100	94500
(b) second-order	5793	5206	7200	119143
(b)-(a) (%)	430	542	-11.1	26.1

表-2 最終設計結果