

山梨大学工学部 正員 深沢 泰晴
同 上 正員 〇笹 岡 達也

1. はじめに

薄肉断面材の衝撃荷重に対する高周波応答の解析は、鋼構造物の耐震設計上あるいは鋼橋における騒音発生メカニズムの解明上、重要な課題である。この種の問題を一次元の棒理論で解析する場合には、せん断変形と回転慣性を考慮した工学的はり理論、すなわちティモシェンコばり理論の薄肉ばりの曲げねじれ問題への拡張として扱うことができる。すでに薄肉閉断面材に関しては、その支配方程式の誘導、代表的断面の場合の曲げねじれ波動の伝播特性、固有振動特性等について報告してきた^{1)~3)}。今回は主として、薄肉閉断面材の場合について、基礎方程式の誘導、ならびに一軸対称の箱げたに対する2, 3の数値解析結果等を報告する。

2. 変位場

薄肉閉断面材の断面の一例を図-1に示す。断面内に任意に定めた点Oを原点とするx, y軸を設け、z軸を部材の軸方向にとる。また薄肉中心線に一致する曲線座標sとこれに直交する座標nを用いる。部材上の任意点P(x, y, z)またはP(n, s, z)のx, y, z方向の変位成分u, v, wを次式で表わす；

$$u = u_s - (y - y_s) \varphi \quad (1a)$$

$$v = v_s + (x - x_s) \varphi \quad (1b)$$

$$w = w_0 - y \psi_x - x \psi_y - \omega \varphi \quad (1c)$$

ここに、 u_s, v_s は断面上に任意に定めた点Sのx, y方向の変位成分、 w_0 は点Oのz方向の変位成分、 φ は断面のz軸まわりの回転角。これらはzのみの関数であるが、 ψ_x, ψ_y, ψ もまたzのみの関数として定義される量である。 ω は単位反りを表わし、次式で与えられる；

$$\omega = \int_{s_0}^s h_n^* ds - n h_s - \left\{ (\varphi h_n^* ds) / (\varphi \frac{1}{t} ds) \right\} \int_{s_0}^s \frac{1}{t} ds \quad (2)$$

$$\text{ここに, } h_n = (x - x_s) \cos \alpha + (y - y_s) \sin \alpha, \quad h_s = -(x - x_s) \sin \alpha + (y - y_s) \cos \alpha \quad (3a, b)$$

また*印は薄肉中心線上の値を意味し、 s_0 は点Oのs座標である。

式(1)にもとづき、任意点Pにおけるひずみ成分を微小変位の仮定のもとに計算すると、次のようになる；

$$\varepsilon_n = \varepsilon_s = \gamma_{ns} = 0, \quad \varepsilon_z = w_0' - y \psi_x' - x \psi_y' - \omega \varphi' \quad (4a, b)$$

$$\gamma_{nz} = (u_s' - \psi_y) \cos \alpha + (v_s' - \psi_x) \sin \alpha - (\varphi' - \psi) h_s \quad (4c)$$

$$\gamma_{sz} = \chi \varphi - (u_s' - \psi_y) \sin \alpha + (v_s' - \psi_x) \cos \alpha + (\varphi' - \psi) h_n \quad (4d)$$

ここに、(')はzによる()の微係数を表わし、また χ は次式で与えられる；

$$\chi = 2n + (\varphi h_n^* ds) / (t \varphi \frac{1}{t} ds) \quad (5)$$

3. 静的つりあい方程式

式(1)によって設定された解析モデルの静的つりあい方程式と境界条件は、仮想仕事の原理に式(1), (4)を用いて求めることができる。その結果、静的つりあい方程式は次のように求まる；

$$N' + q_z = 0, \quad Q_x' + q_x = 0, \quad Q_y' + q_y = 0, \quad T' + m_z = 0 \quad (6a-d)$$

$$M_x' - Q_x + m_x = 0, \quad M_y' - Q_y + m_y = 0, \quad M_\omega' - T_\omega + m_\omega = 0 \quad (6e-g)$$

$$\text{ここに, } N = \int_F \sigma_z dF, \quad M_x = \int_F \sigma_z x dF, \quad M_y = \int_F \sigma_z y dF, \quad M_\omega = \int_F \sigma_z \omega dF \quad (7a-d)$$

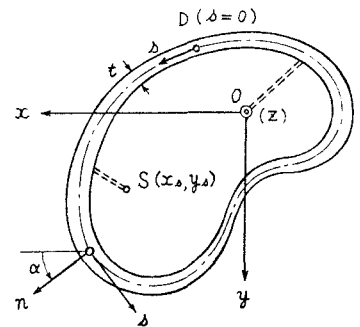


図-1 薄肉閉断面材の断面図

$$T_x = \int_F \tau_{xz} x dF, \quad T = \int_F (-\tau_{nz} h_n + \tau_{sz} h_n) dF, \quad T_w = T - T_x \quad (7e-g)$$

$$Q_x = \int_F (\tau_{nz} \cos \alpha - \tau_{sz} \sin \alpha) dF, \quad Q_y = \int_F (\tau_{nz} \sin \alpha + \tau_{sz} \cos \alpha) dF \quad (7h,i)$$

4. 応力場

直応力 σ_z は、応力-ひずみ関係に一次元の Hooke の法則 $\sigma_z = E \varepsilon_z$ を仮定し、式(4b)、(7a-d)を用い、さらに直交条件 $\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = \int_F \omega dF = \int_F x\omega dF = \int_F y\omega dF = 0$ を考慮すると、次式で与えられる；

$$\sigma_z = N/F + (M_x/I_{xx})x + (M_y/I_{yy})y + (M_w/I_{ww})\omega \quad (8)$$

$$\text{ここに,} \quad I_{xx} = \int_F x^2 dF, \quad I_{yy} = \int_F y^2 dF, \quad I_{ww} = \int_F \omega^2 dF \quad (9a-c)$$

一方、せん断応力 τ_{sz} については、式(8)の σ_z とともにはりの微小要素 tdz の力のつりあい条件を満たすように、 $\partial(\tau_{sz}t)/\partial s + t\partial\sigma_z/\partial z = 0$ を積分して求める。すなわち、近似的に次式で表わされる；

$$\tau_{sz} = \frac{T_x}{I_{xx}}x - \frac{Q_x}{I_{xx}t} \left\{ S_x - \frac{\int (S_x/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} - \frac{Q_y}{I_{yy}t} \left\{ S_y - \frac{\int (S_y/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} - \frac{T_w}{I_{ww}t} \left\{ S_w - \frac{\int (S_w/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} \quad (10)$$

$$\text{ここに,} \quad I_{xx} = \int_F x^2 dF, \quad S_x = \int_0^s xtds, \quad S_y = \int_0^s ytds, \quad S_w = \int_0^s \omega tds \quad (11a-d)$$

5. 断面力-変位関係

式(1)、(8)、(10)をもとに、静的つりあい方程式(6)を付帯条件として課した仮想仕事の原理を用いて、式(1)の変位場および式(8)、(10)の応力場を満たす断面力-変位関係が次のように得られる；

$$N = EF u_s', \quad M_x = -EI_{xx} \psi_x', \quad M_y = -EI_{yy} \psi_y', \quad M_w = -EI_{ww} \psi' \quad (12a-d)$$

$$Q_x = G \{ C_{xx}(u_s' - \psi_x) + C_{xy}(v_s' - \psi_y) + C_{xw}(\varphi' - \varphi) \} \quad (12e)$$

$$Q_y = G \{ C_{xy}(u_s' - \psi_x) + C_{yy}(v_s' - \psi_y) + C_{yw}(\varphi' - \varphi) \} \quad (12f)$$

$$T_w = G \{ C_{xw}(u_s' - \psi_x) + C_{yw}(v_s' - \psi_y) + C_{ww}(\varphi' - \varphi) \} \quad (12g)$$

$$\text{ここに,} \quad \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xw} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{yw} \\ C_{xw} & C_{yw} & C_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xw} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{yw} \\ B_{xw} & B_{yw} & B_{ww} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ww} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B_{xx} = \int_F \frac{1}{t^2} \left\{ S_x - \frac{\int (S_x/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\}^2 dF, \quad B_{xy} = \int_F \frac{1}{t^2} \left\{ S_x - \frac{\int (S_x/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} \left\{ S_y - \frac{\int (S_y/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} dF \quad (14a,b)$$

$$B_{yy} = \int_F \frac{1}{t^2} \left\{ S_y - \frac{\int (S_y/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\}^2 dF, \quad B_{xw} = \int_F \frac{1}{t^2} \left\{ S_x - \frac{\int (S_x/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} \left\{ S_w - \frac{\int (S_w/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} dF \quad (14c,d)$$

$$B_{ww} = \int_F \frac{1}{t^2} \left\{ S_w - \frac{\int (S_w/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\}^2 dF, \quad B_{yw} = \int_F \frac{1}{t^2} \left\{ S_y - \frac{\int (S_y/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} \left\{ S_w - \frac{\int (S_w/t)ds}{\int (1/t)ds} \right\} dF \quad (14e,f)$$

式(12)を式(6)に代入すると、変位表示の静的つりあい方程式が得られる。

6. 慣性力

はりの振動時における単位体積あたりの慣性力 p_x, p_y, p_z は、はりの密度を ρ とし、式(1)を考慮して

$$p_x = -\rho \{ \partial^2 u_s / \partial t^2 - (y - y_s) \partial^2 \varphi / \partial t^2 \}, \quad p_y = -\rho \{ \partial^2 v_s / \partial t^2 + (x - x_s) \partial^2 \varphi / \partial t^2 \} \quad (15a,b)$$

$$p_z = -\rho \{ \partial^2 w_s / \partial t^2 - x \partial^2 \psi_x / \partial t^2 - y \partial^2 \psi_y / \partial t^2 - \omega \partial^2 \varphi / \partial t^2 \} \quad (15c)$$

式(15)を断面積分して、はりの単位長さあたりの慣性力が次のように求まる；

$$g_x = -\rho F (\partial^2 u_s / \partial t^2 + y_s \partial^2 \varphi / \partial t^2), \quad g_y = -\rho F (\partial^2 v_s / \partial t^2 - x_s \partial^2 \varphi / \partial t^2) \quad (16a,b)$$

$$g_x = -\rho F \partial^2 w_s / \partial t^2, \quad m_x = \rho I_{xx} \partial^2 \psi_x / \partial t^2, \quad m_y = \rho I_{yy} \partial^2 \psi_y / \partial t^2 \quad (16c-e)$$

$$m_x = -\rho F (y_s \partial^2 w_s / \partial t^2 - x_s \partial^2 v_s / \partial t^2 + I_s^2 \partial^2 \varphi / \partial t^2), \quad m_w = \rho I_{ww} \partial^2 \varphi / \partial t^2 \quad (16f,g)$$

$$\text{ここに,} \quad I_s^2 = (1/F) \int_F \{ (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 \} dF \quad (17)$$

変位表示の静的つりあい方程式の荷重項を式(16)の慣性力でおきかえて、振動問題の支配方程式が得られる。

数値解析結果については、講演当日にゆずる。

参考文献 1) 深沢：土木学会講演会 No.28, 1973-10. 2) 深沢・太田：同左 No.29, 1974-10. 3) 深沢・太田：山梨大学研究報告 No.25, 1974-12.