

I - 2 Lévy 解による有限帯板法

(株)日本構造橋梁研究所 正員 的場 興司
 極東鋼弦コンクリート振興株式会社 宮崎 義成
 信州大学 谷本 勉允助

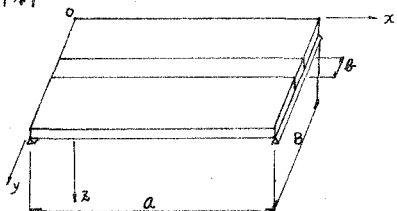
1 概要

現在、鋼構造物をはじめコンクリート構造物においても、箱型桁など、或しては薄肉構造物とみなされる構造物が増加している。これらの構造物の解析方法としては、一般に橋軸方向については格子桁、橋軸直角方向については平面ラメンを用いられているが、桁にねじり（ソウ）が作用したり、局所的な変形・応力などを計算したい場合などは限らずとも適切な解析方法ではない。

ここでは薄肉平板よりなる立体構造物を有限帯板法 (Finite Strip Method) で解析するために基本となる面外曲げのみを受ける平板についての一手法について述べる。

現在、有限帯板法についての論文は種々発表されているが、仮想仕事の原理などエネルギー法に基くものが大半であり、その結果、計算式が繁雑になり、したがってプログラムも複雑になるものと思われる。本解析は対向2辺が単純支持されている矩形板の曲げ問題について M. Lévy の解を用いて基本微分方程式の厳密解を導出して演算子法による漸化変形法にて解析を試みたものである。

2 解析



i) 出発式 板の曲げに関する基本微分方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

右辺 = 0 とおけば、Lévy 解として知られている次式が得られる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2)$$

ここで

$$Y_m = \left[\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}, \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}, \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}, \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] N_m$$

N_m は未定積分常数群で構成される固有値マトリクスであり

$$N_m = [A_m, B_m, C_m, D_m]^T$$

座標 x, y を無次元化する

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{ch} k_m y, \operatorname{sh} k_m y, k_m \operatorname{ch} k_m y, k_m \operatorname{sh} k_m y] N_m \sin l_m x \quad (3)$$

$$\text{ここで } l_m = m\pi, k_m = m\pi \frac{b}{a}, \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}$$

なお(1)式の特解は、後で荷重項として考え、任意の荷重

q について包含し得る解を求める。(3)式を(1)式として有限帯板法の解析を進める。

ii) 一般物理量

$$W = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \sin l_m x \\ \cos l_m x \\ \sin l_m x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_m & 0 \\ 0 & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} k_m y, \operatorname{sh} k_m y, k_m \operatorname{ch} k_m y, k_m \operatorname{sh} k_m y \\ \operatorname{sh} k_m y, \operatorname{ch} k_m y, -k_m \operatorname{sh} k_m y, k_m \operatorname{ch} k_m y \end{bmatrix} N_m \quad (4)$$

$$V = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} D \begin{Bmatrix} \sin l_m x \\ \sin l_m x \\ \cos l_m x \\ \cos l_m x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} p_m^2 & 0 & -p_m^2 & 0 \\ 0 & p_m^2 & 0 & -p_m^2 \\ 0 & (1-\nu)p_m^2 & 0 & 0 \\ p_m^3 & 0 & -(2-\nu)p_m^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} k_m y & \operatorname{sh} k_m y \\ \operatorname{sh} k_m y & \operatorname{ch} k_m y \\ \operatorname{ch} k_m y & \operatorname{sh} k_m y \\ \operatorname{sh} k_m y & \operatorname{ch} k_m y \end{bmatrix} N_m$$

$$\begin{bmatrix} k_m \operatorname{ch} k_m y & k_m \operatorname{sh} k_m y \\ \operatorname{ch} k_m y + k_m \operatorname{sh} k_m y & \operatorname{sh} k_m y + k_m \operatorname{ch} k_m y \\ 2 \operatorname{ch} k_m y + k_m \operatorname{ch} k_m y & 2 \operatorname{ch} k_m y + k_m \operatorname{sh} k_m y \\ 3 \operatorname{ch} k_m y + k_m \operatorname{sh} k_m y & 3 \operatorname{sh} k_m y + k_m \operatorname{ch} k_m y \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここにおける記号説明については、文献1.を同一である。

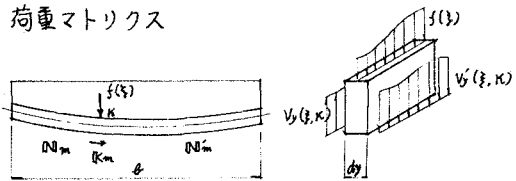
iii) 連続条件

$$W = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ M_y \\ V_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin l_m x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_m & 0 & 0 \\ 0 & p_m^2 & 0 & -p_m^2 \\ 0 & (2-\nu)p_m^3 & 0 & -p_m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} k_m y & \operatorname{sh} k_m y & k_m \operatorname{ch} k_m y & k_m \operatorname{sh} k_m y \\ \operatorname{sh} k_m y & \operatorname{ch} k_m y & k_m \operatorname{sh} k_m y & k_m \operatorname{ch} k_m y \\ 2 \operatorname{sh} k_m y & 2 \operatorname{ch} k_m y & k_m \operatorname{ch} k_m y & k_m \operatorname{sh} k_m y \\ 3 \operatorname{sh} k_m y & 3 \operatorname{ch} k_m y & k_m \operatorname{sh} k_m y & k_m \operatorname{ch} k_m y \end{bmatrix} N_m \quad (6)$$

Y方向の有限帯板間の連続条件を与える場合、境界において w, θ, M_y, V_y についての考慮が要する。B)式を記号化すると

$$W(\xi, p) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m \xi D_m R_m(p) D_m \quad (7)$$

IV) 荷重マトリクス



荷重載荷点 ($p=K$) での力釣合をよければ

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_y \\ M_y \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_y \\ M_y \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(\xi) \end{bmatrix} \quad (8)$$

7)式を用いて(8)式を置きかえると

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m \xi D_m R_m(K) (D_m - D_m) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f(\xi) \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

荷重 $f(\xi)$ は一般に Fourier 級数展開されて次式のように表現できる。

$$f(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin \lambda_m \xi \quad (10)$$

(10)式を(9)式に代入すれば $\sin \lambda_m \xi$ がよりうごき、変数が消え、解析上では2次元問題が1次元問題へと移行したことになる。いまY方向に分布する線荷重について考えると、力釣合式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_m & 0 & 0 \\ 0 & -p_m D & 0 & 0 \\ 0 & p_m D & 0 & -p_m D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch \lambda_m K & sh \lambda_m K & \lambda_m K ch \lambda_m K & \lambda_m K sh \lambda_m K \\ sh \lambda_m K & ch \lambda_m K & \lambda_m K sh \lambda_m K & \lambda_m K ch \lambda_m K \\ ch \lambda_m K & sh \lambda_m K & 2 sh \lambda_m K & 2 ch \lambda_m K \\ sh \lambda_m K & ch \lambda_m K & 2 ch \lambda_m K & 2 sh \lambda_m K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (D_m - D_m) = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

荷重マトリクス K_m を $K_m = D_m - D_m$ と表現できるので

$$K_m = \frac{P_m}{2 p_m^3 D} \begin{bmatrix} sh \lambda_m K & -\lambda_m K ch \lambda_m K & -ch \lambda_m K & \lambda_m K sh \lambda_m K \\ ch \lambda_m K & sh \lambda_m K & sh \lambda_m K & ch \lambda_m K \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

次にY方向に分布する荷重を考える。Y方向の微小区間は $dy = b dK$ より

$$dK_m = \frac{P_m}{2 p_m^3 D} \begin{bmatrix} sh \lambda_m K & -\lambda_m K ch \lambda_m K & -ch \lambda_m K & \lambda_m K sh \lambda_m K \\ ch \lambda_m K & sh \lambda_m K & sh \lambda_m K & ch \lambda_m K \end{bmatrix}^T b dK \quad (13)$$

したがってY方向に分布する荷重マトリクスは

$$\bar{K}_m = \int_0^b dK_m = \frac{P_m}{2 p_m^3 D} \begin{bmatrix} 2 ch \lambda_m p & -\lambda_m p sh \lambda_m p & -2 sh \lambda_m p & \lambda_m p ch \lambda_m p \\ 2 sh \lambda_m p & \lambda_m p ch \lambda_m p & sh \lambda_m p & -ch \lambda_m p \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

他の荷重についても組織的に求められ、表で与えられる。またこれらの荷重マトリクスに、 $\bar{K}$ のマトリクスを内積して加え合わせると(1)式の特殊解を与える事になる。演算子法によれば荷重マトリクスが得られる特長がある。

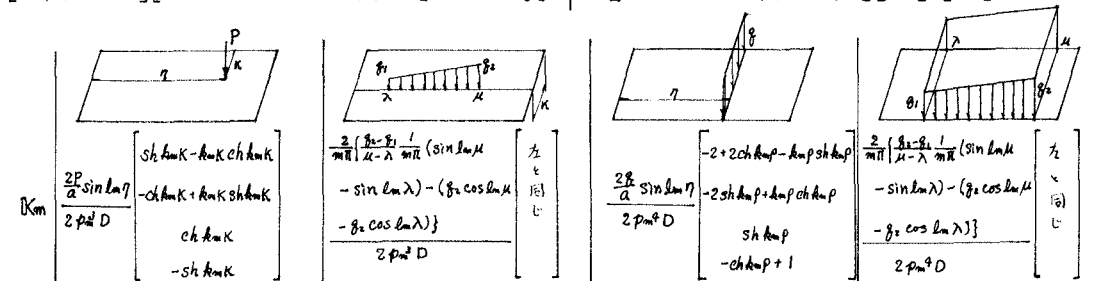
V) 剛性マトリクス

$y=0, b$ の変位量及び力量を引数の0,1で表現すれば、1枚のStrip nについての剛性マトリクスnについて

$$\begin{bmatrix} U_n(0) \\ U_n(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n(0) \\ U_n(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_n' \\ \gamma_n' \end{bmatrix} K_m \quad (15)$$

全体の剛性マトリクスnについては、(15)式を組織的に組み上げて三軸マトリクス (Tri-diagonal Matrix) が得られる。

$$\begin{bmatrix} B_{m,1} & C_{m,1} \\ A_{m,2} & B_{m,2} & C_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m,n-1} & B_{m,n-1} & C_{m,n-1} \\ A_{m,n} & B_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{m,1} \\ U_{m,2} \\ \vdots \\ U_{m,n-1} \\ U_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{m,1} \\ P_{m,2} \\ \vdots \\ P_{m,n-1} \\ P_{m,n} \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$



3. あとがき 紙面の都合で充分な説明を行えなかったが、ここでは荷重項についての重点的に紙面を割いた。なお剛性マトリクスnについては、今まで多数の演算子法についての発表がなされているので、ここでは割愛した。電算プログラムについては(株)日本構造橋梁研究所の酒井技師と著者の協力により FACOM 230-15 の小型コンピュータを用いて作成し、結果を得ている。なおプログラム作成にあたり国鉄・石橋忠基技師の重要な示唆を与えてもらった事に感謝いたします。

文献(1) Timoshenko and Woinowsky-Krieger "Plate and Shell". 文献(2) Yau-kai Cheung "Finite Strip Method of Elastic Slabs"