

山梨大学工学部 正員 荻原能男
 学生員 ○ 河西 基

1. まえがき

降雨・流出現象に対する研究は、今日まで多くの解析方法が提案されている。洪水流出の解析は、a)線型応答関数を利用する単位図法及び流出関数法、b)貯留関係を利用する貯留関数法及びタンクモデル法、c)力学(水理学)的手法を利用する方法などの決定論的解析が従来からよく用いられている¹⁾。また最近は、不規則変動論による確率統計的解析方法を用いて、降雨と流出及びその応答系の性質を明らかにしようとする研究が活発になりつつある。本論文では、降雨流出の関係を変分問題として取り扱うことにより、既存の流量資料によらないで流量波形を推算できる解析方法を提案し、流出関数法・単位図法などとの関連性についても述べている。

2. 汎関数の物理的意味

線型応答関数を用いた降雨・流出の関係式は

$$Q(t) = f \int_0^\infty h(\tau) \cdot R(t-\tau) d\tau \quad (1) \quad \int_0^\infty h(\tau) d\tau = 1 \quad (2) \quad \text{で表わされる。}$$

($Q(t)$:時刻 t における流出量, $R(t)$:同時刻の有効単位降雨量, $h(\tau)$:線型応答関数, f :流出係数)

このとき、一般に汎関数は形式的に $J[Q(t)] = \int_0^\infty F(Q(t), R(t)) dt$ (3)

として与えられる。ここでは、降雨・流出現象を線型系として取り扱い、汎関数

$$J[a] = \int_0^\infty \{Q(t+T) - f \cdot R(t)\}^2 dt \quad (4) \quad (T: \text{遅滞時間})$$

を最小化する変分問題を考える。ここで、上の汎関数の物理的意味としては、被積分項が貯留関数法に対応して流域貯留水量の時間的変化を表わすものと考えられる。したがって、この変分問題は、流域への流入量に対して遅滞時間(T)だけ遅れた流出量が貯留効果を最小にして出てくるように、系を選ぶ問題となる。このような条件を満足する停留関数を以下のようにして求める。

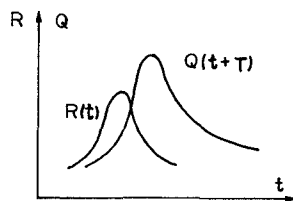


図 - 1

3. Euler-Lagrange の微分方程式

まず、 $Q(t+T)$ を Taylor 展開すると、汎関数は

$$J[a] = \int_0^\infty \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{T^l}{l!} D^l Q(t) - f \cdot R(t) \right\}^2 dt \quad (5) \quad (D^l \equiv \text{微分演算子 } d^l/dt^l) \quad \text{となる。}$$

T 及び f を定数として、式(5)の第一変分をとり、オイラーの方程式を得る為さらに部分積分を行なうと、

$$\frac{\delta J[a]}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{T^k}{k!} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \left[D^l \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i}{i!} D^i Q(t) - f \cdot R(t) \right\} \delta D^{k+l-1} Q(t) \right]_0^\infty \right\} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty \frac{T^k}{k!} D^k \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{T^l}{l!} D^l Q(t) - f \cdot R(t) \right\} \delta Q(t) dt \quad (6)$$

となる。よって、 Q が停留関数のとき $\delta J = 0$ であるから、上式の第2項から Euler-Lagrange の方程式として

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^k}{k!} D^k \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{T^l}{l!} D^l Q(t) - f \cdot R(t) \right\} = 0 \quad (7) \quad \text{が得られ、また自然境界条件として、}$$

$$\left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{T^{l+k}}{(l+k)!} (-1)^{l-1} D^{l-1} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i}{i!} D^i Q(t) - f \cdot R(t) \right\} \right\}_0^\infty = 0 \quad (k=0, \dots, n-2) \quad (n \geq 2) \quad (8)$$

が与えられる。オイラーの方程式(7)は、Quimpo³⁾の論文に紹介されている、可分性を仮定した貯留関数に関する微分方程式の形と一致している。さらに式(8)は、考えている積分領域(時間)の初めと終りでの貯留水量の変化がないという条件を示している。

4. 理論解と線型応答関数

式(7)を t でLaplace変換し、変換後のparameterを t から S 、また $L\{R(t)\}=\bar{R}$ とすると、

$$L\{Q(t)\} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(TS)^{j+m}}{j!} \times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{T^k}{(k-m)!} S^{k-j} D^{j-1} Q(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{T^k}{k!} S^{k-j} D^{j-1} Q(0) \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{T^{j+m}}{j!} S^{j+k} D^{m-k-1} Q(0) + f \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-TS)^m}{m!} \bar{R}(t) - f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-T)^m}{m!} S^{m-j} D^{j-1} R(0) \right\} \quad (9)$$

であり、さらに上式で逆Laplace変換を行なうと、オイラーの方程式(7)を満足する解 $Q(t)$ の式が得られる。式(9)において、第4項のみに着目して他の項を無視すれば、式(5)において $n=2, 3, 4$ としたとき得られる結果は式(10)の通りであり、それぞれに対応する応答関数の波形を図-2に示した。応答関数がUnit Hydrographに相当することは周知のとおりであり、式(10)はいわゆる流出関数法に対応している。

$$\begin{aligned} n=2; Q &= f \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} R(t-\tau) d\tau \\ n=3; Q &= f \int_0^t \frac{2}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} \sin \frac{\tau}{T} \cdot R(t-\tau) d\tau \\ n=4; Q &= f \int_0^t \frac{1}{T} \left\{ 1.476 e^{-\frac{1.591}{T} \tau} + e^{-\frac{0.702}{T} \tau} (0.730 \sin \frac{1.897}{T} \tau - 1.476 \cos \frac{1.897}{T} \tau) \right\} R(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

(n ; $Q(t+T)$ のTaylor展開次数)

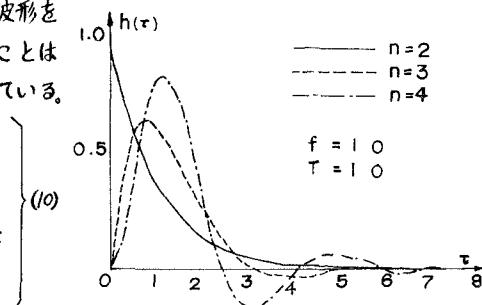


図-2 線型応答関数

5. 考察および実測値との比較

図-2を見ると明らかのように、 $n=3$ のときの応答関数の形状が比較的一般の単位図に近い結果を得たが、一方 $h(\tau)$ 曲線に負の値の部分が現われ、 n を増やすとこの傾向がさらに強まり、Sine curve的振動が顕著になっていくことなどから、物理現象としては不自然であるといえる。これには、 $h \geq 0$ なる条件を加えて改善する方法もある⁴⁾。しかしながら、 n が大きくなるにしたがって、 $h(\tau)$ がある曲線に収束するものと考えられる。さらに、図-3は実際に入力データを式(10)に入れて流出量を計算し、実測値及び佐藤、吉川、木村の流出関数法による計算結果とを比較したものであり、 $n=3$ が比較的良好な結果を与えている。以上の結果をまとめると本方法は、式(5)の関係から出水の遅れ T が小さい短期流出であること、さらに線型性の仮定があることに注意しなければならぬ。

6. まとめ

この研究は、Unit Hydrographの本質を解明しようとするものであり、現在 f, T を R および Q の関数として非線型流出に拡張することを検討している。

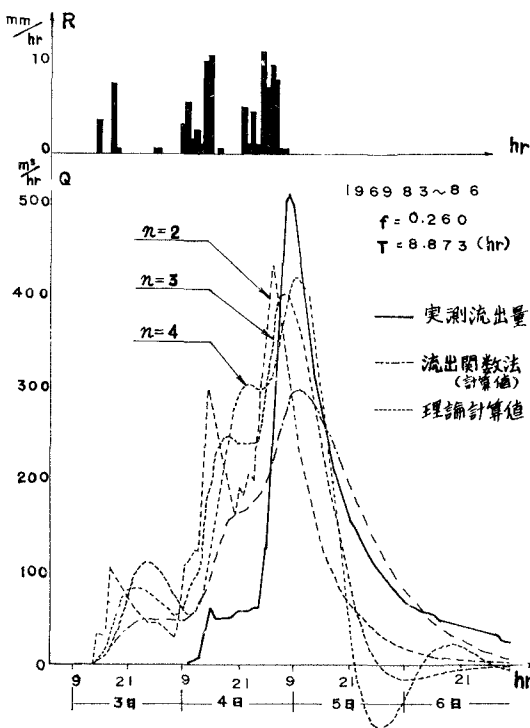


図-3 実測値との比較

- < 参考文献 > 1) 水理公式集; 土木学会編, 昭46年版, PP.105~131, 2) 高木不折; 土木学会論文報告集, 第227号, 1974.7月, PP.23~28
3) Rafael G. Guimpo; United States-Japan Bilateral Seminar in Hydrology, Honolulu, January 1971
4) 応用水理学下II; 丸善 PP.81~133, 5) 萩原、砂田、小林; 第8回自然災害科学総合シンポジウム, 1971.10月