II－4　乱流場における，粒子拡散の実験及びシミュレーション

東京工業大学　工学部　正会員　日野幹雄
東京工業大学　大学院　学生会員　○池田信己
東京工業大学　工学部　学生会員　伊藤雄二

1．はじめに　；乱流拡散の理論的取扱いには，One particle analysis，Two particle analysis 及び Puff analysis があるが，Two particle analysis 及び Puff analysis においては，いまだ不明確なことが多い。本研究は，これらについて数値シミュレーションを行い，又このシミュレーションの場におけるオイラー相関とラグランジュ相関の比較を行おうとするものである。本研究の手法は，実際の海や河川の複雑な乱流場におけるオイラー的測定から求めたパワースペクトル形より拡散の様子を見積るのに応用しうる。なお以上と平行して，開水路自由表面上における One particle，Two particle の実験を行ったので，その結果を報告する。

2．数値シミュレーション

a）シミュレーションの方法　；最も基礎的な一様等方性が成り立つ乱流場における一次元拡散について考える。乱流の変動速度を多数の波の合成と考え，時間と場所の関数とする。乱流場のパワースペクトル形を波数と角周波数に関して与え，位相のずれ θ を乱数で与える。これを二重フーリエ変換することにより，変動速度を計算し粒子の軌跡を求める。パワースペクトル S_E は，

$$S_E(k,\omega)=\alpha\,\omega^{-\frac{5}{3}}k^{-\frac{5}{3}}\quad(\omega_0<\omega<\omega_m,\ k_0<k<k_m)\ \text{------------}(1)$$

但し，k；波数，ω；角周波数，α；乱れの強さに関係する係数。

変動速度 $v_E(k,\omega)$ はパワースペクトルにより次のように求めることができる。

$$v_E(k,\omega)=4\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty |F(k,\omega)|\,e^{i(\omega t+ky+\theta_{\omega k})}d\omega\,dk\ \text{---------}(2)$$

$$S_E(k,\omega)=|F(k\ \omega)|^2/(T\cdot Y)\quad(T,\ Y\text{は測定に関する時間，距離})\text{-}(3)$$

$y=y_0$ から粒子を放出して，時刻 t での粒子の座標を $y=y_1$，ラグランジュ速度を $v_l(y_0,t)$ とすると，

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_1}=v_l(y_0,t)=v_E(y_1,t)\ \text{----------------------}(4)$$

である。これを解くことにより粒子の軌跡を求める。式(4)の積分には，ルンゲークッタージルの方法を用いた。

b）乱流場の計算法

i)必要な時点の変動速度のみを求める方法　：一粒子を追跡しつつ必要な（y_1，t）点の変動速度のみを次式により ω．k について各々フーリエ変換から求め，それを用いて次の時間ステップについて計算していく方法。

$$v_E(y,t)=4\sqrt{\alpha TY}\int_{\omega_0}^{\omega_m}\omega^{-\frac{5}{6}}e^{i(\omega t+\theta_\omega)}d\omega\int_{k_0}^{k_m}k^{-\frac{5}{6}}e^{i(ky+\theta_k)}dk\ \text{--------}(5)$$

ii)FFT（高速フーリエ変換）による方法　：One particle ごとに全ての時間・場所について乱流の変動速度を求める。まず式(2)を ω についてFFTで変換する。

$$V(k,t)=4\sqrt{\alpha TY}\int_{\omega_0}^{\omega_m}(f_r+if_i)(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,d\omega\ (6)$$

但し，$f_r=\omega^{-\frac{5}{6}}\cos\theta_{\omega k}$，$f_i=\omega^{-\frac{5}{6}}\sin\theta_{\omega k}$（$\theta_{\omega,k}$；$\omega$ と k による値）

更に上式を同じように k についてFFTにより変換する。

$$v_E(y,t)=4\sqrt{\alpha TY}\int_{k_0}^{k_m}V(k,t)(\cos ky+i\sin ky)\,dk\ \text{---}(7)$$

図1：FFTによって求めた速度変動の等値線図　横軸；時間，縦軸，距離

c）乱流速度場の設計

最小波数 k_0，最小角周波数 ω_0，乱流場の時間ステップ Δt，場所のステップ ΔY，パワースペクトルの係数 α を求める方法を以下に示す。

① $\tau=0$，$\xi=0$ とおくと，相関係数 $R=1$ より，

$$\overline{v^2}=4\int_{k_0}^{k_m}\int_{\omega_0}^{\omega_m}S(k,\omega)\,d\omega\,dk\ \text{------------------}(8)$$

②時間ステップΔtに対しある相関aを仮定することにより，Δtとω_0の関係がきまる。$\xi=0$として$R(0,\Delta t)=a$ $(0<a<1)$とし，

$$\overline{v^2}\,a=4\int_{k_0}^{k_m}\int_{\omega_0}^{\omega_m}S(k,\omega)\,e^{-i\omega\Delta t}\,d\omega\,dk \qquad (9)$$

③同様に$R(\Delta Y,0)=b$ $(0<b<1)$とすると，

$$\overline{v^2}\,b=4\int_{k_0}^{k_m}\int_{\omega_0}^{\omega_m}S(k,\omega)\,e^{ik\Delta Y}\,d\omega\,dk \qquad (10)$$

④このシミュレーションの場に拡散現象がおさまるように，$\overline{v^2}$をきめ，(8)式を使ってαを求める。Taylorの理論の

$$\sqrt{\overline{Y^2}}=\sqrt{\overline{v^2}}\,T \quad (T\approx 0)$$

において，$\sqrt{\overline{Y^2}}=K\Delta Y$，$T=N\Delta t$を代入すると，

$$\sqrt{\overline{v^2}}=N\Delta Y/K\Delta t \qquad (11)$$

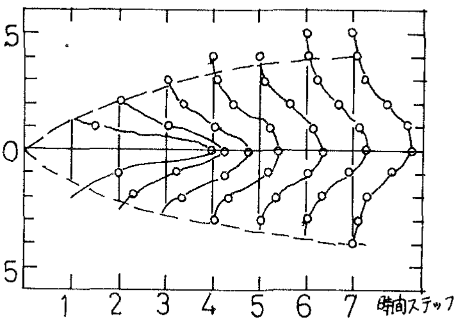


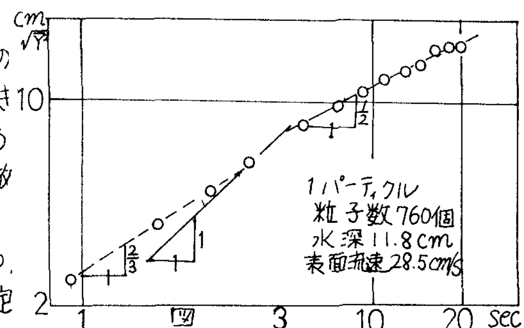
図2：One particleによる確率分布

d）結果

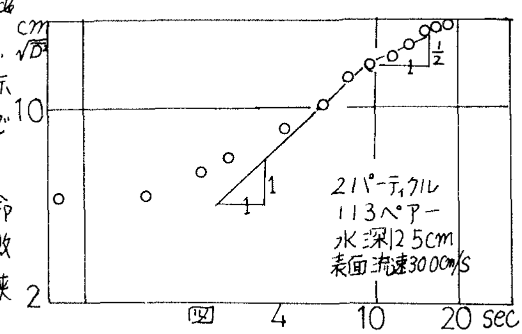
乱流変動の等値線図とOne particleによる拡散の様子の一部を各々図1と図2に示す。計算は東京工業大学計算機センターにおける電子計算機HITAC8700で行なった。

3．実験

a）方法　；巾1m，長さ20mの開水路の一部に5.5mの試験区間を設け，底面には，高さ5cmのテトラポットを敷きつめ，さらに2cm方眼の金網をのせ，乱れが一様となるように工夫した。巾の中央点で，直径7mmの粒子を水面上に放出し，放出地点より25，50，75，100，150，200，250，300，350，400，450，500，550cmの地点に設けられた，巾方向に25等分した測定格子により流れと直角方向の座標を読みとった。One particleにおいては，拡がりの偏差を，Two particleにおいては，2粒子間の拡がりのrmsを求め，それぞれ図3，図4に示した。なお横軸の時間は，格子までの距離を平均表面流速で割ったものである。



図



図

b）結果　．One particleにおいて，$t\gg t_*$（t_*は渦の寿命時間）の領域では，$\sqrt{\overline{Y^2}}$は$\sqrt{t}$に比例し，Taylorの理論に一致している。しかし，$t\simeq 0$では，$\sqrt{\overline{Y^2}}\propto t$の領域はきわめて狭いが，むしろ$\sqrt{\overline{Y^2}}\propto t^{\frac{2}{3}}$となっている。Two particleにおいて実験結果によると慣性領域での理論に従う$\sqrt{\overline{D^2}}\propto t$の領域がみられる。しかしさらに$t$が大きい場合の$\sqrt{\overline{D^2}}\propto t^{\frac{3}{2}}$の領域（Richardsonの拡散係数に関する4/3乗則の領域）はこの実験では認められない。この理由は，水路の特性によるか，流れと直角方向に2粒子が整列することが困難なためと考えられる。

参考文献

1）Taylor G.I「Diffusion by continuous movements」Proc．Lond．Math vol XX（1921）

2）日野幹雄「モンテカルロ法による乱流拡散の二，三の計算について」第9回水理講演会（1965）

3）日野幹雄「データー処理の手法」応用水理学下Ⅱ（本間仁編）（1971）

4）Bugliarello.G「Some Example of Stochastic Modeling for Mass and Momentum Transfer」Proc．Int．Sym（1971）

5）Kraichnan R.H「Diffusion by a random velocity field」Phy.of Fluids，vol.13（1970）

6）Patterson．G.S & Corrin S「In Dynamics of Fluids and Plasmas」edited by Pai（1966）