

II-2 波型底面上の粘性振動流

東京工業大学工学部 正員 日野幹雄

大学院 学生員 藤崎治男

1. 序論

粘性流体中で円柱や球が振動している場合の流れを、Schlichting⁵が解析して、定常流成分が生じることを示した。この事実に着目して、Lyne⁶は波型底面上の粘性振動流について解析し、流体粒子の振幅と底面の波長との比 R を用いて、 $R \ll 1$ と $R \gg 1$ とに分け、摂動法により解を求めた。そして、そのような条件のもとでの波型底面上の定常流を示した。それに対して、筆者は R の値を限定せずに、もっと一般的に波型底面上の定常流を求めることを試みた。すなわち、波型の影響が生じる二次的な流れを示す流関数を、時間的にはFourier級数で展開し、水深方向の座標に関してはHermite級数で展開した。そしてWeighted Residual法のひとつであるMoment法によって係数を決定して、関数を求め、定常流を得た。

2. 方程式の誘導

波型底面を直交座標系で $y = \alpha \cos Kx$ と仮定する。ただし、 $\alpha \ll \sqrt{2\nu/\omega}$ とする。等角写像により、 (x^*, y^*) に変換する。

$x^* = x + \alpha e^{-ky} \sin Kx$, $y^* = y - \alpha e^{-ky} \cos Kx$, $J = 1 + 2\alpha K e^{-ky^*} \cos Kx^* + O(\alpha^2)$
この時、底面は $y^* = O(\alpha^2)$ となる。連続式より流関数 χ を次のように定義する。

$$u = \sqrt{J} \partial \chi / \partial y^*, \quad v = \sqrt{J} \partial \chi / \partial x^*$$

ここで $y^* \rightarrow \infty$ において、 $u = U_\infty \cos \omega t$ の速度で振動しているものとする。このとき境界層の厚さを表す長さは $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ である。次のように無次元化する。

$$\chi = \chi / (U_\infty \delta), \quad \xi = x^* / \delta, \quad \eta = y^* / \delta, \quad \tau = \omega t, \quad \alpha = \alpha / \delta, \quad R = K \delta^2$$

Reynolds数を $R = U_\infty \delta / \nu$ とし、また $\alpha \ll 1$ である。以上より、流関数 χ についての方程式が得られる。

$$\frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} D^2 \chi - \frac{\partial(\chi, J D^2 \chi)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{R} D^2 (J D^2 \chi), \quad \text{ただし } D^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (1)$$

境界条件： $\eta = 0$ のとき $\chi = \partial \chi / \partial \eta = 0$, $\eta \rightarrow \infty$ のとき $\partial \chi / \partial \eta \rightarrow 0$, $\partial \chi / \partial \xi \rightarrow 0$
 $\alpha \ll 1$ であるから、次のように展開して、①へ代入する。

$$\chi = \chi_0 + \alpha \chi_1 + \alpha^2 \chi_2 + \dots$$

$O(\alpha^0)$ の方程式から平板上の粘性振動流に関するStokesの解 χ_0 が得られる。

$$U(\eta, \tau) = \partial \chi_0 / \partial \eta = \cos \tau - e^{-\eta} \cos(\tau - \eta)$$

次に $O(\alpha)$ の項から χ_1 の方程式がえられる。そこで

$$\chi_1(\xi, \eta, \tau) = \mathcal{R} [F(\eta, \tau) e^{iR\xi}]$$

とおきかえて、 $F(\eta, \tau)$ の式を求めると次のようになる。「 $\cdot$ 」は η に関する微分を表す。

$$\begin{aligned} \frac{2}{iR} \frac{\partial}{\partial \tau} (F'' - R^2 F) + U(F'' - R^2 F) - U'' F - \frac{1}{iR} (F'''' - 2R^2 F'' + R^4 F) \\ = 2R e^{-R\eta} \left\{ -U U' + \frac{1}{iR} (U''' - 2R^2 U'') \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

境界条件： $\eta = 0$ のとき $F = F' = 0$, $\eta \rightarrow \infty$ のとき $F \rightarrow 0$, $F' \rightarrow 0$

3. 数値解法

②と③から一般的に解析解を得ることは困難である。そこで筆者は次のように級数展開して、Moment法によ

り係数を決定して、関数 $F(\eta, \tau)$ を求めることにした。

$$F(\eta, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \phi_n(\eta) \right\} e^{im\tau} \quad (4)$$

ここで、 $\phi_n(\eta)$ は $[0, \infty]$ で定義され、境界条件③をみたす関数列である。ここでは次のような関数列を用いた。

$$\phi_n(\eta) = \left\{ e^{-\frac{\eta^2}{2}} H_{2n-1}(\eta) + (-1)^n (2n-1)!! x e^{-\frac{\eta^2}{2b^2}} \right\} / \sqrt{(2n-1)! \sqrt{\pi/2}} \quad (b=0.1)$$

オ1項の $H_{2n-1}(\eta)$ は Hermite 関数の奇数項で、オ2項は境界条件をみたすための修正項である。④を②へ代入して、両辺に $e^{-im\tau}$ をかけて、 $\tau=0$ から 2π まで積分する。更に両辺に $\overline{\phi_p} = H_{2p-1}(\eta) / \sqrt{(2p-1)! \sqrt{\pi/2}}$ をかけて、 $\eta=0$ から ∞ まで積分すると、係数 C_{mn} に関する方程式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{m-1,n} \alpha_{pn} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} (m\beta'_{pn} + \beta''_{pn}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{m+1,n} \delta_{pn} = \lambda_{mp} \quad (5)$$

ここで、 $\alpha_{pn}, \beta'_{pn}, \beta''_{pn}, \delta_{pn}, \lambda_{mp}$ は定数である。

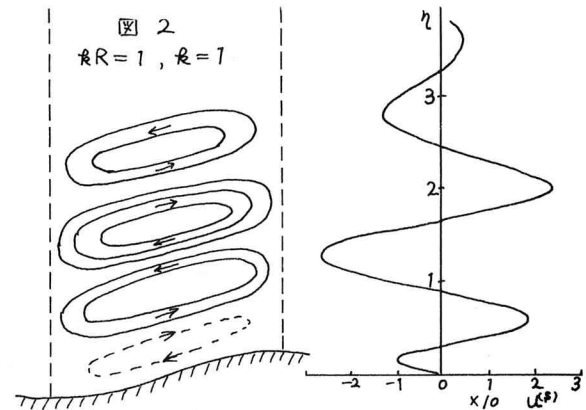
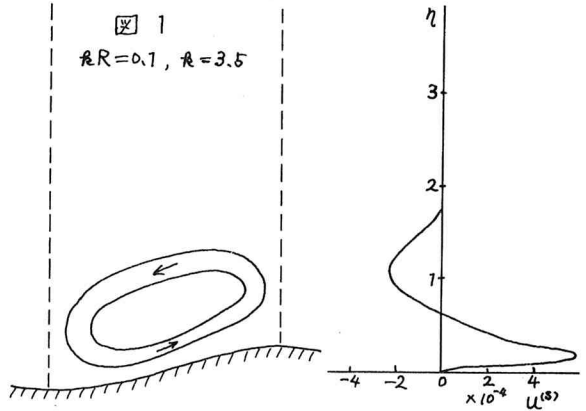
$$\alpha_{pn} = \int_0^{+\infty} \overline{\phi_p} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-1-i\eta}) \right] (\phi_n'' - \eta^2 \phi_n) + i e^{-1-i\eta} \phi_n \, d\eta, \quad \beta'_{pn} \text{ ---}$$

さて、⑤を $m = -M, -M+1, \dots, M$

$(n, p) = 1, 2, \dots, N$ とすれば C_{mn} についての $(2M+1)N$ 次元の連立一次方程式がえられる。これを解くことにより、 $F(\eta, \tau)$ がえられる。

4. 計算結果と考察

以上の計算よりえられる定常流を2例示す。 $R=0.1$ 、 $k=3.5$ の場合循環流が1層だけみられる。これは Lyne の求めた $kR \ll 1$ 、 $k \gg 1$ の場合の解とほぼ一致している。また $kR = k = 1$ の場合には Order の大きい循環流が数層みられる。ただし底面の近傍で図1と逆の循環流になり、また検討の余地があるものと思われる。さて、振動流を与えたとき、主流の周期以外に定常流や倍周期の振動流が生じるのは、方程式の非線形項のゆえであり、曲面上の振動流は常に定常流が生じるものと思われる。なお、計算は続行中である。また、計算結果は写真のような装置で、グリセリンを入れた箱の中で波型底面を振動させる実験によって検証中である。



(参考文献)

- 1) W. H. Lyne 「Unsteady viscous flow over a wavy wall」 J. F. M. vol. 50, PP. 33~48, 1977
- 2) J. F. A. Sleath 「Mass transport over a rough bed」 J. Marine Research, vol. 32, No. 1, PP. 13~24, 1974

