

II-1 振動流による管内圧力分布

東京都立大学工学部 正員 安 川 浩

緒言

貯水池とサージタンクを結ぶ圧力管路内での非圧縮性流体振動や、波動境界層内の渦や乱れの発生機構を調べる際に、管内振動流の挙動が有用な指針を与える場合もあるかと思われる。本報告では都立大学工学部に設置された振動流実験装置に関連し、管内圧力分布と若干の問題点について述べる。

1. ポテンシャル解による管内圧力

1.1 円筒座標におけるポテンシャル解

速度ポテンシャルを $\Phi = -\nabla\psi$ と定義するとき、非圧縮性流体の連続条件より $\nabla\Phi = -\nabla^2\psi = 0$ 。よって

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

運動の軸対称性と一様管路を仮定すれば $\partial/\partial\theta = 0$ 。

$$\therefore \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$\therefore \psi = C_1(t)z + C_2(t) \quad (1.3)$$

ここで $C_1(t)$, $C_2(t)$ はいづれも時刻 t のみの関数である。管軸の基準面からの高さを h とすれば、圧力方程式は

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{g^2}{2} + gh = \text{const.} \quad (1.4)$$

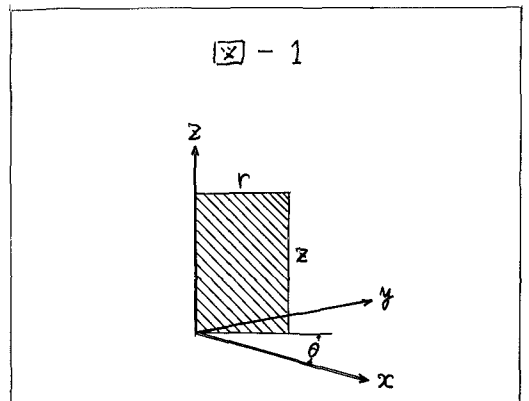
$z = z_0$ における圧力 p_0 , 速度 g_0 , 高さ h_0 を与えれば、

$$-C_1'(t)(z - z_0) + \frac{p - p_0}{\rho} + \frac{1}{2}(g^2 - g_0^2) + g(h - h_0) = 0.$$

一様管路では $g = g_0$, 即ち流体粒子の静止状態からの変位を ξ とし、角速度 ω の振動流を想定すれば $-\frac{\partial\psi}{\partial t} = C_1(t) = \frac{d\xi}{dt} = j\omega\xi$. $\therefore C_1(t) = -\omega^2\xi$.

$$\therefore \frac{p - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2}{g}\xi \cdot (z - z_0) + h - h_0 = 0 \quad (1.5).$$

$$\text{重力水勾配 } I = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho g} + h\right) = -\frac{\omega^2}{g}\xi \quad (1.6).$$



1.2 球座標におけるポテンシャル解

管路に円錐形の管径漸変部がある場合には近似的に円錐の頂点に湧きあがくは出口があると考えられる。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right\} = 0.$$

radial 方向の運動のみを考えると

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = C_1(t) \quad (1.7)$$

円錐形管壁は $\varphi = \varphi_0$ に対応するものとし、 $\varphi = \varphi_0$ 、半径 r の球面上の面積を $S(r, \varphi_0)$ とする。

$$S(r, \varphi_0) = 2\pi r^2 (1 - \cos \varphi_0) \quad (1.8)$$

球面 S を通過する流量を Q とする。

$$Q = -S(r, \varphi_0) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.9)$$

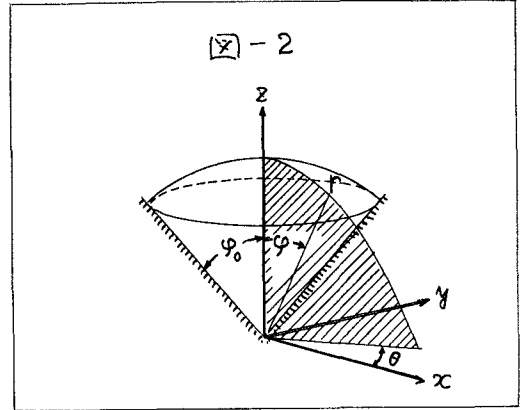
式(1.7)と圧力方程式より

$$\Phi(r, t) = -\frac{C_1(t)}{r} + C_2(t) = \frac{r}{S(r, \varphi_0)} Q + C_2(t) \quad (1.10)$$

$$-\frac{j\omega r Q}{S(r, \varphi_0)} + C_2'(t) + \frac{p}{\rho} + gh + \frac{g^2}{2} = \text{const.} \quad (1.11)$$

前項同様 $r=r_0$ の諸量に添字 0 をつけ $-\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Q}{S(r, \varphi_0)}$ を考慮する。

$$-j\omega Q \left[\frac{r}{S(r, \varphi_0)} - \frac{r_0}{S(r_0, \varphi_0)} \right] + \left\{ \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) - \left(\frac{p_0}{\rho} + gh_0 \right) \right\} + \frac{Q^2}{2} \left[\frac{1}{[S(r, \varphi_0)]^2} - \frac{1}{[S(r_0, \varphi_0)]^2} \right] = 0 \quad (1.12)$$



2 一様管路部における粘性振動

円筒座標による非圧縮性流体のナビエ-ストークス方程式の軸方向成分は運動の軸対称性と軸方向への一様性を仮定すれば運動方程式 I を時間 t の関数と仮定して次式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = gI + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\tau}{\rho} \right) \quad \dots \quad (2.1)$$

角速度 ω の周期運動を想定し、管径 r_0 、壁面マッピタ力 τ_0 を用いて、 $r_* = r/r_0$ 、 $\tau_* = \tau/\tau_0$ と無次元化すれば次式が得られる。

$$\frac{j\omega r_0}{\tau_0 \rho} U = \frac{r_0 g}{\tau_0 \rho} I + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} \left(r_* \tau_* \right) \quad \dots \quad (2.2)$$

I が時間 t のみの関数であることを考慮し、 $\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial r}$ により I と U を消去し、 $\tau = \alpha_0 r_*$ 、 $\alpha_0 = r_0 \sqrt{-j\omega \mu}$ の変換を行えば次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}(\gamma \tau_r) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma}(\gamma \tau_r) + \gamma \tau_r = 0 \dots (2.3)$$

式(2.3)の一般解は $\gamma \tau_r = A \{ \gamma J_1(\gamma) \} + B \{ \gamma Y_1(\gamma) \}$ であるが、管軸上での τ_r の有限性により $B=0$ 。また、管壁での non-slip condition より A が定まり、流速 U 、マッハ数 M 、断面平均流速 V は次式で表わされる。

$$U = -\frac{jgI}{\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0(\gamma)}{J_0(\gamma_0)} \right\} \quad (2.4)$$

$$\tau_r = -\frac{jgI}{\gamma_0} \cdot \frac{J_1(\gamma)}{J_0(\gamma_0)} \quad (2.5)$$

$$V = \frac{jgI}{\omega} \left\{ \frac{2}{\gamma_0} \cdot \frac{J_1(\gamma_0)}{J_0(\gamma_0)} - 1 \right\} = \frac{jgI}{\omega} \cdot \frac{J_2(\gamma_0)}{J_0(\gamma_0)} \quad (2.6)$$

断面平均流速 V と断面平均変位 ξ の間には $V = j\omega \xi$ の関係があるから、 $I = (\omega^2 \xi / g) \cdot J_0(\gamma_0) / J_2(\gamma_0)$ が得られ、非粘性振動にはおける動水勾配 $I_0 = -\omega^2 \xi / g$ を考慮すれば、式(2.7)が得られ、管内圧力あるいは動水勾配 I は非粘性解により予想される値と、大きさ及び位相の上で或る差異をもつことが理由づけられる。

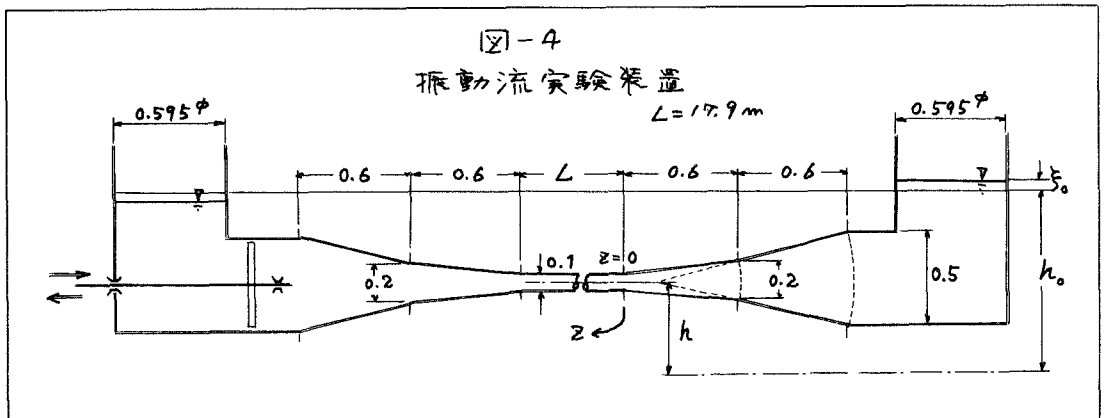
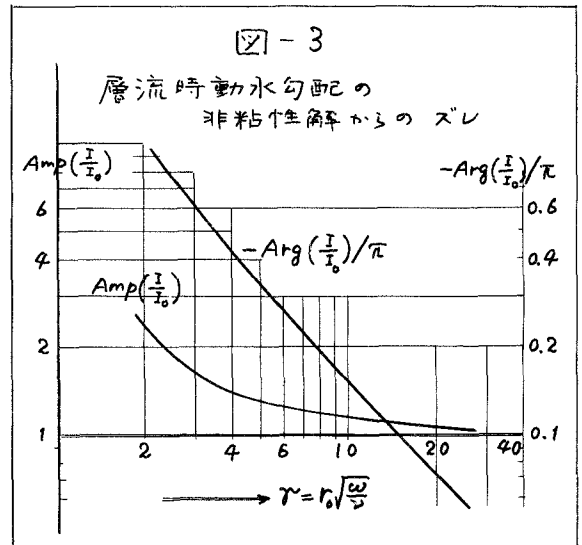
$$\frac{I}{-\frac{\omega^2}{g} \xi} = -\frac{J_0(\gamma_0)}{J_2(\gamma_0)} \dots (2.7)$$

式(2.7)の右辺は $\gamma_0 = r_0 \sqrt{j\omega/\nu}$ の関数で $r = r_0 \sqrt{\omega/\nu}$ と表わせば $\gamma_0 = r e^{-\pi/4}$ であるから、計算結果を図-3に示す。

管内の流体が液体の場合には管端の液面計により変位 ξ を知ることもできるが、空気流の場合には図-3を考慮すれば、差圧計により知ることもできるであろう。

3 実験結果と考察

都立大学工学部に設置した振動流実験装置は図-4に示す通りピストン部の径



50 cm 周期 1~40 秒の起流装置と他端の調圧タンクの間に長さ約 18 m の管路を接続するくみになっている。

管径漸変部は内径 50~20 cm, 20~10 cm, 10~5 cm と いづれも長さ 60 cm の円錐台状のブロックにより直線的に変化している。その際の圧力は漸変部外縁(内径 50 cm の漸変ブロックの外縁)における動水勾配線の値($P/\rho g + h$)が図-4 における($h_0 + \xi_0$)に等しいとして計算した。図-5 および図-6 にそれぞれ非共振周期における一様管路部の差圧および管径漸変部の圧力測定の一例を示す。

この装置のピストンを無視した場合の自由振動周期 T に対し、任意の非共振周期の振動流を考えたとき、その場合完全に周期的な振動流にはなりにくいようである。その理由はピストンとピストンシリンダーの間のわずかな隙間の存在により、ピストンの運動に流体が完全に追従しないためと思われる。

上に述べた事柄を調べる目的で、図-4 の右端の調圧タンクに水位計をとりつけ、他方ピストンを push-pull するフランクにリミットスイッチをつけ、時計の 12 時の位置にフランクが到達するとスイッチを押すようにセットした。

図-7 は非共振周期における水位、差圧、位相の記録の一例であるが、差圧の記録には小さな山や谷がいたるところにみられ、他方水位記録はプラスからマイナスに変化する瞬間にはフランクがリミットスイッチを押す時刻より大幅に遅れていることがわかる。尚この場合の自由振動周期は約 17 秒である。

以上のことから、理想的な振動流を発生させるためには、当然ながら共振点、をうまく利用することが必要と思われる。

参考文献

安川、田川「管内自由振動流の減衰性に関する研究」土木学会論文集 208号 1972

