

東洋大学工学部 正会員 高田孝信
同上 同上 O高田清美

1 まえがき

著者らは多柱式基礎の動的特性や振動現象を観測し、さらに簡単な振動系を想定してその耐震設計を行なうにあたって必要なバネ定数および減衰定数の算定を行なった結果、かなり複雑な特性を呈することが知られた。^{(1),(2),(3)}特に減衰性や復元性はお互いに関連し合いながら周波数特性を示し、そのとり扱いは極めて煩雑となり、実際の設計にこれらの性状を組みこませることは困難のように思われる。

そこで本報文においては仮想質量的な考え方で、付加質量の算定を試みた。一般に基礎構造物の振動に対する付加質量（若しくは仮想質量）は振動系のとり方によって異なり、厳密にとり扱う場合には考慮しなくてもよいが、振動系のとり方如何によっては付加質量を考慮することにより解析を簡単化することができる。特にこの傾向は地盤と構造物との相互関係が複雑な多柱基礎の場合には顕著となり、その効果は大きくなる。すなわち付加質量に仮想質量的な意味あいを持たせることによってその相互関係を含ませ、これまでに行なって来た一連の実験結果を基に付加質量を算定し、考察および検討を加えたものである。

2. 実験の概要

多柱基礎供試体の形状および配置状態は図-1に示すようなものである。柱には鋼管を用い、柱頭の頂盤は鉄筋コンクリート製である。各供試体A, B, Cの寸法および重量等は表-1に示す。供試体を設置した地盤の柱状図は図-2に示すように振動性状に大きく影響すると思われる深度2m前後までは比較的均質なローム層からなっている。

実験は静的載荷試験、自由振動試験および強制振動試験の3ケースについて実施し（結果の詳細は(3)参照）、今回は供試体BとCの間で載荷時間を変化させた載荷試験を行なった。

3 付加質量の算定

基礎に対する土の作用力は直接的には地盤反力であるが、地盤反力は基礎および周辺土の動的挙動により変動する。別の見方をすれば、振動している基礎の周辺地盤の土の或部分は基礎に対する付着土とみなすことができ、この量を求める。

実験は3ケースについて行なわれており、これらの結果を付加質量算定のために用いることを考慮して、振動系のモデル化にあたって次の仮定および条件を設定する。1) 復元力は杭（又は柱）自体の持つ曲げ剛性（EI）と、地盤反力によるものとに分け、いずれの試験の場合にもこれらの特性は変わらないものとする。2) 減衰力は粘性減衰とし、静的載荷の場合にはなく、自由振動のときは地盤へのエネルギー遷移によるものと構造減衰を加え合せたものが頂盤に作用しているとする。強制振動のときは前述の自由振動の場合の減衰力と、付加質量の質点にも粘性減衰力が作用するものとする。3) 付加質量の作用位置は R. Chang の

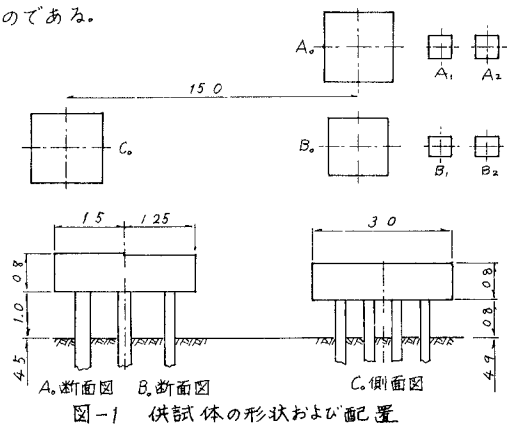


図-1 供試体の形状および配置

表-1 供試体の寸法および重量

種類	柱の寸法および本数	頂盤寸法 (mm)	頂盤重量(t)
A.	30 ϕ × 9 [*]	300 × 300 × 80	18.40
B.	20 × 9	250 × 250 × 75	11.70
C.	20 × 14	300 × 300 × 80	17.96

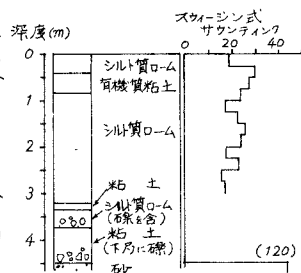


図-2 柱状図

式より得られる地中部第1不動点深さの1/3とする。

以上の仮定および条件によつて各試験ごとの振動系を示すと
図-3のようになる。これを解くために次の弾性式を考える。

$$\left. \begin{aligned} \delta_o &= \delta_{oo} P_o + \delta_{oi} P_i \\ \delta_i &= \delta_{io} P_o + \delta_{ii} P_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

但し、 δ_{oo} , δ_{oi} , δ_{io} , δ_{ii} は影響係数で $\delta_{oi} = \delta_{io}$ である。

こゝで外力 P_o , P_i は静的試験の場合、図-3の a)より、

$$\left. \begin{aligned} P_o &= P_H \\ P_i &= -k_g \delta_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

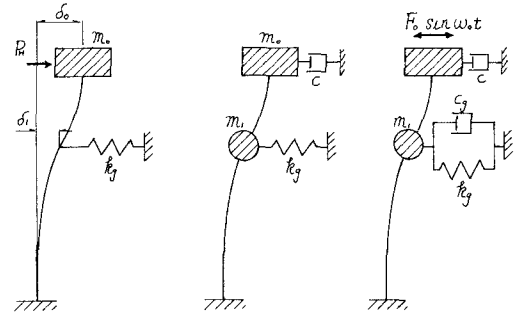


図-3 各試験の振動モデル

となる。自由振動については同じく b) より、また強制振動については c) よりそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P_o &= -m_o \frac{d^2 y_o}{dt^2} - c \frac{dy_o}{dt} \\ P_i &= -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - k_g y_i \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \left. \begin{aligned} P_o &= -m_o \frac{d^2 y_o}{dt^2} - c \frac{dy_o}{dt} + F(t) \\ P_i &= -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - c_g \frac{dy_i}{dt} - k_g y_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、(4)式の $F(t)$ は起振機により頂盤に作用する外力で、本実験の場合には $F(t) = F_o \sin \omega_o t$ である。

静的載荷試験結果より、地盤反力によるバネ定数 k_g を求めるために(2)式を(1)式に代入すると、

$$k_g = \frac{P_H \delta_{oo} - \delta_o}{P_H (\delta_{oi}^2 - \delta_{oo} \delta_{ii}) + \delta_o \delta_{ii}} \quad (5)$$

となる。自由振動の場合の抵抗力は(3)式で表わされるからこれと(1)式より、運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m_o \frac{d^2 y_o}{dt^2} + c \frac{dy_o}{dt} + \frac{\delta_{ii}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} y_o - \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} y_i &= 0 \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + k_g y_i - \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} y_o + \frac{\delta_{oo}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} y_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

この(6)式の解、すなわち y_o および y_i を、 $y_o = \delta_o e^{i\omega t}$, $y_i = \delta_i e^{i\omega t}$ と表わされるものとする、これを(6)式に代入して整理すると、

$$\left. \begin{aligned} \left(m_o \omega^2 - i c \omega - \frac{\delta_{ii}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} \right) \delta_o + \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} \delta_i &= 0 \\ \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} \delta_o + \left(m_i \omega^2 - k_g - \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} \right) \delta_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。こゝで振幅 δ_o , δ_i が0以外の根を有するためには次の式が成立しなければならない。但し本解析の振動系では質点oおよびiに作用する抵抗力の関係だけについて考える場合には減衰力を無視すると、

$$\begin{vmatrix} m_o \omega^2 - \frac{\delta_{ii}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} & \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} \\ \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} & m_i \omega^2 - k_g - \frac{\delta_{oi}}{\delta_{oo} \delta_{ii} - \delta_{oi}^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

となる。したがって、固有振動数 ω を二乗の形で表わすと次のようになる。

$$\omega^2 = \frac{1}{2m_0m_1} \left(m_0k_g + \frac{m_0\delta_{00} + m_1\delta_{11}}{\delta_{00}\delta_{11} - \delta_{01}^2} \right) \pm \frac{1}{2m_0m_1} \sqrt{\left(m_0k_g + \frac{m_0\delta_{00} + m_1\delta_{11}}{\delta_{00}\delta_{11} - \delta_{01}^2} \right)^2 - \frac{4m_0m_1}{\delta_{00}\delta_{11} - \delta_{01}^2} (1 - \delta_{11}k_g)} \quad (9)$$

すなわち、付加質量 m_1 は (9) 式より次式となり、これより算出される。

$$m_1 = \frac{1}{\omega^2} \left[k_g + \frac{m_0\omega^2\delta_{00} - 1}{m_0\omega^2(\delta_{00}\delta_{11} - \delta_{01}^2) - \delta_{11}} \right] \quad (10)$$

強制振動における運動方程式は (1) と (4) 式より、

$$\begin{cases} y_0 = \left\{ -m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} - c \frac{dy_0}{dt} + F_0 \sin \omega t \right\} \delta_{00} + \left\{ -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - c_g \frac{dy_1}{dt} - k_g y_1 \right\} \delta_{01} \\ y_1 = \left\{ -m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} - c \frac{dy_0}{dt} + F_0 \sin \omega t \right\} \delta_{01} + \left\{ -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - c_g \frac{dy_1}{dt} - k_g y_1 \right\} \delta_{11} \end{cases} \quad (11)$$

となる。こゝで荷重に対する頂盤での位相差を y_0 、付加質量の質点での位相差を y_1 とすると (11) 式の解は、
 $y_0 = \delta_0 \sin(\omega t - y_0)$ および $y_1 = \delta_1 \sin(\omega t - y_1)$ で表わされるものとし、これを (11) 式に代入すると、

$$\begin{cases} \delta_0 \sin(\omega t - y_0) = \left\{ m_0\omega^2\delta_0 \sin(\omega t - y_0) - c\omega\delta_0 \cos(\omega t - y_0) + F_0 \sin \omega t \right\} \delta_{00} \\ \quad + \left\{ m_1\omega^2\delta_1 \sin(\omega t - y_0) - c_g\omega\delta_1 \cos(\omega t - y_0) - k_g\delta_1 \sin(\omega t - y_0) \right\} \delta_{01} \\ \delta_1 \sin(\omega t - y_0) = \left\{ m_0\omega^2\delta_0 \sin(\omega t - y_0) - c\omega\delta_0 \cos(\omega t - y_0) + F_0 \sin \omega t \right\} \delta_{01} \\ \quad + \left\{ m_1\omega^2\delta_1 \sin(\omega t - y_0) - c_g\omega\delta_1 \cos(\omega t - y_0) - k_g\delta_1 \sin(\omega t - y_0) \right\} \delta_{11} \end{cases} \quad (12)$$

である。こゝで $(\omega t - y_1) = \pi/2$ のときを考えると (12) 式は次のようになる。

$$\begin{cases} \delta_0 \cos(y_1 - y_0) = \left\{ m_1\omega^2\delta_0 \cos(y_1 - y_0) - c\omega\delta_0 \sin(y_1 - y_0) + F_0 \cos y_1 \right\} \delta_{00} + (m_1\omega^2\delta_1 - k_g\delta_1) \delta_{01} \\ \delta_1 = \left\{ m_0\omega^2\delta_0 \cos(y_1 - y_0) - c\omega\delta_0 \sin(y_1 - y_0) + F_0 \cos y_1 \right\} \delta_{01} + (m_1\omega^2\delta_1 - k_g\delta_1) \delta_{11} \end{cases} \quad (13)$$

若し、頂盤での位相差と付加質量の質点の位相が近似的に等しいとみなせるとき、すなわち $y_0 = y_1$ のときは $y_0 = y_1 = y$ として、

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{\delta_{01}} \left\{ \delta_{11}\delta_1 + (F_0 \cos y + m_0\delta_0\omega^2)(\delta_{01}^2 - \delta_{00}\delta_{11}) \right\} \\ m_1 = \frac{1}{\omega^2} \left[k_g + \frac{1}{\delta_{11}} - \frac{(m_0\omega^2\delta_0 + F_0 \cos y)\delta_{01}}{\delta_1\delta_{11}} \right] \end{cases} \quad (14)$$

となり、付加質量の質点の振幅 δ_1 を求め、これを用いて付加質量 m_1 が求まる。又、位相差 y_0 と y_1 がかなりの差異がある場合には (13) 式より減衰力 F_{damp} を求め、この値を用いて付加質量を求める。即ち、

$$\begin{cases} F_{damp} = \left\{ m_1\omega^2\delta_0 \cos(y_1 - y_0) + F_0 \cos y_1 - \frac{\delta_{11}\delta_0 \cos(y_1 - y_0) - \delta_1\delta_{01}}{(\delta_{00}\delta_{11} - \delta_{01}^2)} \right\} \\ m_1 = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{\delta_{11}} \left(1 - \frac{\delta_{01}}{\delta_1} \left\{ m_0\omega^2\delta_0 \cos(y_1 - y_0) - F_{damp} + F_0 \cos y_1 \right\} \right) + k_g \right] \end{cases} \quad (15)$$

4 計算結果と考察

供試体 A₀、B₀、C₀ の影響係数は表-2 に示す値となり、これを用いて付加質量を求めた。静的載荷試験結果より (5) 式によってバネ定

表-2. 影響係数

種類	影 響 係 数 (cm/Kg)		
	δ_{00}	δ_{01}	δ_{11}
A ₀	5.926×10^{-5}	4.266×10^{-5}	3.350×10^{-5}
B ₀	2.349×10^{-4}	1.763×10^{-4}	1.422×10^{-4}
C ₀	1.321×10^{-4}	1.073×10^{-4}	0.914×10^{-4}

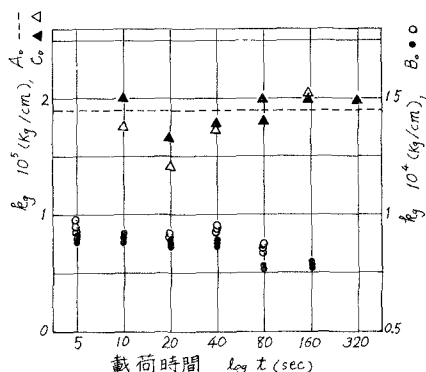


図-4 バネ定数 k_g と載荷時間との関係

数を求めると図-4のようになる。この値は地盤反力によるバネ定数で、杭の剛性によるものは含まない。図より、載荷時間による値の変化はあまり顕著ではない。従ってバネ定数 k_g は各試験段階の平均を各供試体のバネ定数として付加質量を計算する。すなわち、 A_0 は $\bar{k}_g = 1.90 \times 10^5$ (kg/cm), B_0 は $\bar{k}_g = 8.78 \times 10^4$ (kg/cm) C_0 は $\bar{k}_g = 1.89 \times 10^5$ (kg/cm)である。この k_g を用いて自由振動および強制振動の場合の付加質量を求めた結果を図-5, 図-6および図-7に示した。自由振動より得られる付加質量、即ち、(10)式を用いるときの振動数は固有振動数を示している。また、強制振動試験の場合は(14)式より δ_1 を計算して求めた値を○印で、柱間の地盤上で測定した値を δ_1 として用いた場合を●印で示してある。以上の結果より、供試 A_0 の付加質量は共振点付近でおおよそ26 (kg sec²/cm), B_0 については約23 (kg sec²/cm)であり、 C_0 については自由振動の場合が約43 (kg sec²/cm)であり、強制振動の結果からは約52 (kg sec²/cm)と得られた。すなわちこの値と頂盤質量 m_0 との比(m_1/m_0)を求めると、 A_0 が $(m_1/m_0)_{A_0} = 1.19$, B_0 が $(m_1/m_0)_{B_0} = 1.63$, であり C_0 が $(m_1/m_0)_{C_0} = 2.32$ となりかなり大きい値である。試にこの質量を実験地盤の体積に換算すると、 A_0 では約14.6 (m³) B_0 は12.3 (m³)、 C_0 は28.7 (m³)と得られた。静的水平載荷試験より求めたみかけのバネ定数 k_s は各供試体について

$$A_0: k_s = 8.04 \times 10^4 \text{ (kg/cm)}$$

$$B_0: k_s = 3.07 \times 10^4 \text{ (kg/cm)}$$

$$C_0: k_s = 7.01 \times 10^4 \text{ (kg/cm)}$$

であり、これらの結果より付加質量は基礎構造全体としての剛性の大小よりもむしろ柱の本数、又は杭径の方により大きく影響される傾向がある。即ち柱の本数が多い程その値は大きくなることから推察される。

また、振動数の変化に対しては A_0 , C_0 についてはその影響が顕著であり、 B_0 については振動数の変化にはほとんど無関係に一定となる傾向を示している。

5 むすび

以上の結果は設計段階で比較的求めやすい静的バネ定数を基にして、多柱基礎を地盤も含めた2質点系とみなした場合に考えられる付加質量を示したものであり、必ずしも現象そのものを示しているものではなく、前述のように一種の仮想質量的なものとして求めたものである。

参考文献

- (1) 高田(孝), 高田, 小暮, "多柱基礎の動的特性に関する実験的研究" 第27回年次学術講演会概要集(土木学会)
- (2) 高田(孝), 高田, 山下, " " 第28回 " (")
- (3) 高田(孝), 高田, "多柱基礎の振動実験" 東洋大学工学部研究報告, 1972年第8号

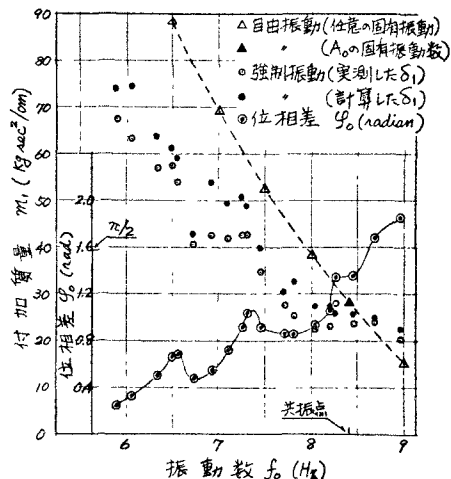


図-5 供試体 A_0 の付加質量

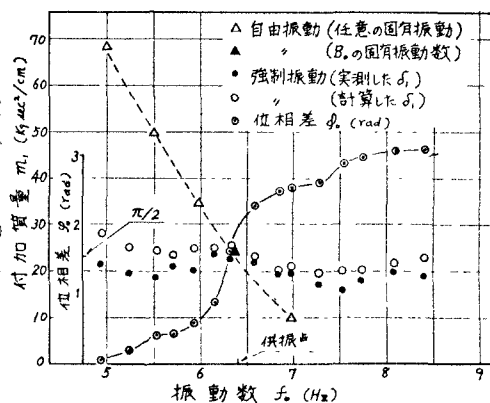


図-6 供試体 B_0 の付加質量

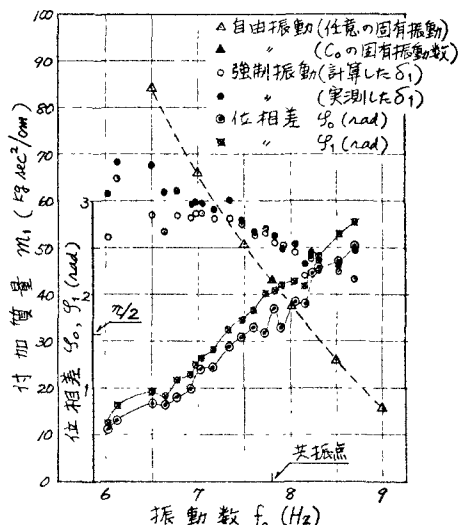


図-7 供試体 C_0 の付加質量