

山梨大学工学部 正員 〇 深沢 恭晴

山梨大学大学院 学生員 河西 晴征

1. はじめに

曲線材の構造解析上の特質は、材を構成する全母線が曲率を有していて、しかもその曲率が母線ごとに異なることにある。曲線材の座屈に関する従来の研究のほとんどは、この母線ごとの曲率の差異を無視し、全母線が同一の曲率をもつものとして解析している。曲率半径に較べて、曲率半径方向の断面寸法が非常に小さい曲線材においては、このような取り扱いで工学上は充分と云えよう。しかしながら、母線ごとの曲率の差異を無視し得ない場合を含め、曲線材の座屈問題の一般理論としては、これではもの足りないことは明らかである。

このような観点から、本報告は既に確立されている各母線の曲率の違いを考慮した静的つりあい問題の基礎理論を、弾性座屈問題に発展させ、その基礎方程式を最も一般的と思われる形で求めようとするものである。従来個々の研究課題として取り上げられて来た各種の座屈形態は、この一般理論のもとに包括・統合されることになり、その特殊なケースとして導くことができるようになる。

基礎方程式の誘導方法としては、有限変形問題として、エネルギー原理に基づく変分問題のオイラーの微分方程式として求める方法と、座屈変形状態におけるつりあい方程式として直接求める方法とが一般的であるが、ここでは後者の解法によった。なお、基礎方程式は、より一般性を与えるために、すなわち座屈形態、特殊な仮定あるいは支持条件等に応じて、固有な軸線が選べるように、任意な軸線の変形で表わした。例えば、中立軸の変形で表わすと、曲率面内の座屈問題および中立軸の不伸長の仮定を適用する場合には有利であり、またねじれを伴う座屈においては、せん断中心軸の変形で表わした方が便利である場合が多い、等である。

2. 静的つりあいの方程式

図-1に薄肉曲線材の一例を示す。同図に示すように、座標系として、右手系円柱座標系 (ρ', θ, ζ) および右手系直角座標系 $(O-X, Y, Z)$ を用いる。 $\rho'-\theta$ および $Y-Z$ 平面は曲線材の曲率面に平行とし、 $\rho'-\zeta$ および $X-Y$ 平面は材の断面を含む平面に一致するように設ける。

$X-Y$ 平面上に任意に定めた点Aの X, Y, Z 方向の変位を u_A, v_A, w_A とし、断面のねじれ回転角を φ （符号は右ねじの法則に従う）とする。以下点Aを極と呼ぶ。 X, Y, Z 方向の荷重をそれぞれ g_{xA}, g_{yA}, g_{zA} 、極Aを通り X, Y, Z 軸に平行な軸のまわりのモーメント荷重をそれぞれ m_{xA}, m_{yA}, m_{zA} 、極Aを通る軸線（以下A軸と呼ぶ）に関するバイモーメント荷重を m_{wA} とし、これらはA軸の単位長さあたりの荷重強度を表わすとする。

X, Y 座標の原点Oを曲線材の断面の中立点にとつた場合、曲線材の静的つりあいの方程式は、任意に定めた極Aの変形 u_A, v_A, w_A, φ を用いて表わすと、文献1)あるいは2)より、表-1のように与えられる。表-1において、 R_A および R_0 はそれぞれA軸および中立軸の曲率半径、 x_A, y_A は極Aの X, Y 座標、また $D = (I') = \frac{d}{d\theta}$ である。さらに、同表中における断面定数は、曲線材の断面積を F とすると、曲げに関する断面定数として

$$J_x = R_0 \int_F y^2 dF, \quad J_{xy} = R_0 \int_F \frac{1}{\rho} xy dF, \quad J_y = R_0 \int_F x^2 dF \quad \text{----- (1) a-c}$$

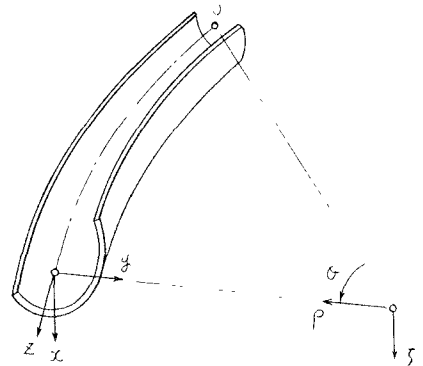


図-1

表-1 薄肉曲線材の静的つりあいの微分方程式 ($D = d/d\theta$)

w_A	v_A	u_A	$R_A \varphi$	1
$\frac{R_A}{R_0} E(J_x + FR_0^2) D^2$	$\frac{R_A}{R_0} E(J_x + FR_0 y_A) D^3 - EFR_0^2 D$	$E \left\{ \frac{R_A}{R_0} (J_{xy} + FR_0 x_A) - \frac{C_{xA}}{R_A} \right\} D^3$	$\frac{EC_{xA}}{R_A} D^3 + \frac{R_A}{R_0} E(J_{xy} + FR_0 x_A) D$	$= -R_A^* \delta_{xA}$ $-R_A^* m_{xA}$
	$\frac{R_A}{R_0} E(J_x + F y_A^2) D^4 - 2 \frac{R_A}{R_0} EFR_0 y_A D^3 + \frac{R_A}{R_0} EFR_0^2$	$E \left\{ \frac{R_A}{R_0} (J_{xy} + F x_A y_A) - \frac{C_{xA}}{R_A} \right\} D^4 - \frac{R_A}{R_0} EFR_0 x_A D^2$	$\frac{EC_{xA}}{R_A} D^4 + \frac{R_A}{R_0} E(J_{xy} + F x_A y_A) D^2 - \frac{R_A}{R_0} EFR_0 x_A$	$= R_A^* \delta_{yA}$ $-R_A^* m'_{xA}$
対		$E \left\{ \frac{R_A}{R_0} (J_y + F x_A^2) - \frac{1}{R_A} (2C_{yA} - \frac{C_{yA}}{R_A}) \right\} D^4 - GJ_{TA} D^2$	$\frac{1}{R_A} E(C_{yA} - \frac{C_{yA}}{R_A}) D^4 + \left\{ \frac{R_A}{R_0} E(J_y + F x_A^2) + GJ_{TA} - \frac{EC_{yA}}{R_A} \right\} D^2$	$= R_A^* \delta_{xA}$ $-R_A^* m'_{xA}$ $+R_A^* m_{\omega A}$
	称		$\frac{1}{R_A} EC_{\omega A} D^4 - (GJ_{TA} - 2 \frac{EC_{yA}}{R_A}) D^2 + \frac{R_A}{R_0} E(J_y + F x_A^2)$	$= R_A^* m_{\omega A}$ $-R_A^* m'_{\omega A}$

板厚を t , 極 A に関する単位反りを w_A とすると, ねじりに関する断面定数として

$$C_{xA} = R_A \int_F \frac{1}{\rho} y_A \omega_A dF, \quad C_{yA} = R_A \int_F \frac{1}{\rho} x_A \omega_A dF, \quad C_{\omega A} = R_A \int_F \frac{1}{\rho} \omega_A^2 dF, \quad J_{TA} = R_A^3 \int_F \frac{1}{\rho^3} t^2 dF \quad \text{--- (2) a-d}$$

等で定義される。

3. 座屈変形のつりあい方程式

一定な外力を受けて変形し, つりあい状態にある系に対し, さらに新しい変形を強制した場合, 新しい応力状態, 載荷状態が形成される。この応力, 荷重の変化分は, 第1の変形状態の系にとっては, 強制力とともに新しい荷重とみなすことができる。その意味でこの応力, 荷重の変化分を特に, 附加荷重と呼ぶことにする。さて, 第2の変形状態において, もし反力の変化分と附加荷重とがつりあう場合には, その変形状態は強制力を除去しても, それ自身でつりあい状態にあることになり, この場合は第2の変形はいわゆる座屈変形にほかならない。

したがって, 座屈変形のつりあい方程式は, 第1の変形を微小変形として座屈変形の初期状態とすれば, 静的つりあい方程式の荷重項を, 座屈変形に伴って生ずる附加荷重で置きかえることによって得られる。以下にこの附加荷重を3つの成分にわけて計算する。

(1) 応力の作用方向の変化によって生ずる附加的力とモーメント

まず, 第1の変形で生じた直応力に起因する附加的力の板厚中心面の単位面積あたりの x , y , z 方向成分を p_{xo} , p_{yo} , p_{zo} とすると, 図-2を参照して

$$\left. \begin{aligned} p_{xo} &= \frac{t}{\rho d\theta} \left\{ \{ \sigma + \Delta\sigma + d(\sigma + \Delta\sigma) \} \{ \phi_y + d\phi_y + (\varphi + d\varphi) d\theta \} - (\sigma + \Delta\sigma) \phi_y \right\} \\ p_{yo} &= \frac{t}{\rho d\theta} \left\{ \{ \sigma + \Delta\sigma + d(\sigma + \Delta\sigma) \} (\phi_x + d\phi_x) - (\sigma + \Delta\sigma) \phi_x \right\} \\ p_{zo} &= -\frac{1}{\rho d\theta} \left\{ \{ \sigma + \Delta\sigma + d(\sigma + \Delta\sigma) \} (\phi_x + d\phi_x) d\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3) a-c}$$

ここに, $\Delta\sigma$ は座屈変形に伴って起る直応力の変化分である。また, ϕ_x, ϕ_y は着目点 $P(x, y, z)$ を通る母線の y - z , x - z 面に平行な平面内における接線回転角であり, 着目点 P の x , y , z 方向変位を u , v , w とすると

$$\phi_x = \frac{1}{\rho} (v' + w), \quad \phi_y = \frac{1}{\rho} u' \quad \text{--- (4) a,b}$$

で表わされる。

式(3)において, $\phi_x, \phi_y, \varphi, d\theta, \Delta\sigma, d\sigma$ を一次の

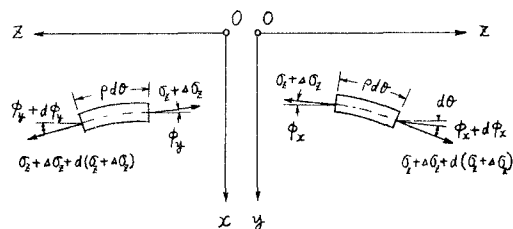


図-2

微小量, $d\phi_x, d\phi_y, d\varphi$ および $d(\Delta\phi)$ を二次の微小量と考えると, 式(3)は〔〕内の三次以上の微小項を省略して次のようになる;

$$\left. \begin{aligned} p_{zo} &= \frac{\tau}{\rho} \left\{ \frac{d}{d\theta} (O_z \phi_y) + O_z \varphi \right\} \\ p_{yo} &= \frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\theta} (O_z \phi_x) \\ p_{zo} &= -\frac{\tau}{\rho} O_z \phi_x \end{aligned} \right\} \text{---- (4) a-c}$$

一方, セン断応力 $\tau_x (\equiv \tau_{xz}), \tau_y (\equiv \tau_{yz})$ についても図-3を参照し, 直応力の場合と同様な処理によって

$$\left. \begin{aligned} p_{xz} &= -\frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\theta} (\tau_y \varphi) \\ p_{yz} &= \frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\theta} (\tau_x \varphi) \\ p_{xz} &= -\frac{\tau}{\rho} \left\{ \frac{d}{d\theta} (\tau_x \phi_y + \tau_y \phi_x) + \tau_x \varphi \right\} \end{aligned} \right\} \text{(5) a-c}$$

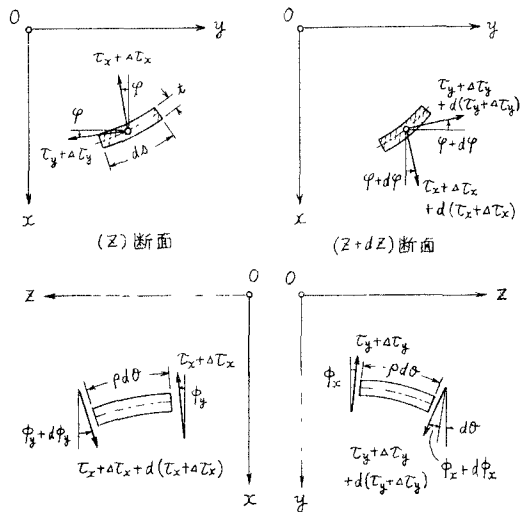


図-3

結局, 応力の作用方向の変化によって生ずる附加荷重は, 式(4), (5)で表わされる力を全断面にわたって積分し, A軸の単位長さあたりの強度で表わせば, 次式のようになる;

$$\left. \begin{aligned} g_{xA} &= \frac{1}{R_A} \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_F (O_z \phi_y - \tau_y \varphi) dF \right\} + \frac{1}{R_A} \varphi \int_F O_z dF \\ g_{yA} &= \frac{1}{R_A} \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_F (O_z \phi_x + \tau_x \varphi) dF \right\} \\ g_{zA} &= -\frac{1}{R_A} \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_F (\tau_x \phi_y + \tau_y \phi_x) dF \right\} - \frac{1}{R_A} \int_F (O_z \phi_x + \tau_x \varphi) dF \\ m_{zA} &= \frac{1}{R_A} \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_F (O_z \phi_x + \tau_x \varphi) (X - X_A) - (O_z \phi_y - \tau_y \varphi) (Y - Y_A) \right\} dF - \frac{1}{R_A} \varphi \int_F O_z (Y - Y_A) dF \end{aligned} \right\} \text{---- (6) a-d}$$

(2) 応力の作用点の変位による附加的モーメント

座屈変形前の変形状態において, 作用していた応力は座屈変位に際して, 附加的なモーメントを形成する。直応力 O_z については図-4, セン断応力については図-5をそれぞれ参照し, (1)の場合と同様な処置によって, 板厚中心面の単位面積あたりの附加モーメント dm_z は

$$dm_z = \frac{\tau}{\rho} \left\{ O_z u + \frac{d}{d\theta} (\tau_y u - \tau_x v) \right\} \text{---- (7)}$$

式(7)のモーメントを全断面にわたって積分し, A軸の単位長さあたりの強度で表わせば

$$m_{zA}^{(2)} = \frac{1}{R_A} \int_F O_z u dF + \frac{1}{R_A} \frac{d}{d\theta} (\tau_y u - \tau_x v) dF \quad (8)$$

(3) 荷重の作用点の変位による附加的モーメント

座屈変形前の状態において作用していた外力は, 座屈変形によって, その作用位置を変えるため, 附加的なモーメントを生成する。板厚中心面の単位面積あたりの作

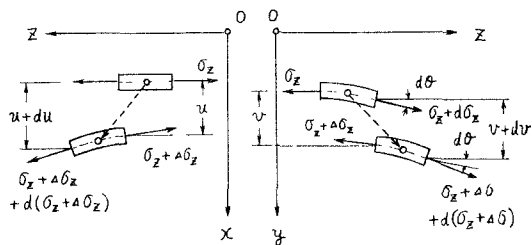
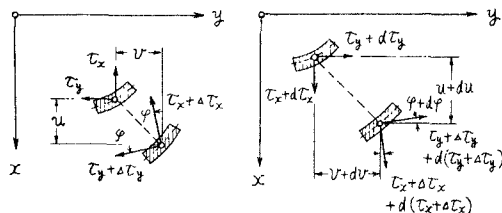


図-4



(Z) 断面

(Z+dZ) 断面

図-5

用荷重の x, y, z 方向成分を p_x^0, p_y^0, p_z^0 とすると、これらによって形成される附加モーメントは

$$dm_z = r(p_y^0 u - p_x^0 v) \quad \text{----- (9)}$$

したがって、A 軸の単位長さあたりの強度で表わせば

$$m_{zA}^{(3)} = \frac{1}{R_A} \int_P r(p_y^0 u - p_x^0 v) dF \quad \text{----- (10)}$$

以上より、座屈変形にともなう附加荷重として、 g_{xA}, g_{yA}, g_{zA} は式 (6)_{a-c} で与えられ、 m_{zA} は式 (6)_d, (8), (10) の和として与えられる。

一方、任意点 P の変位 u, v, w と極 A の変位 u_A, v_A, w_A との間の関係は

図 - 6

$$u = u_A - (y - y_A) \varphi, \quad v = v_A + (x - x_A) \varphi, \quad w = w_A - (y - y_A) \phi_A - (x - x_A) \psi_A - \omega_A \psi_A \quad \text{----- (11)_{a-c}}$$

$$\text{ここに, } \phi_{xA} = \frac{1}{R_A} (v_A' + w_A'), \quad \phi_{yA} = \frac{1}{R_A} u_A', \quad \psi_A = \frac{1}{R_A} (\varphi' - \frac{1}{R_A} u_A') \quad \text{----- (12)_{a-c}}$$

また、 ϕ_x, ϕ_y と $\phi_{xA}, \phi_{yA}, \psi_A$ との間には、次式が成り立つ；

$$\phi_x = \phi_{xA} + \frac{R_A}{\rho} (x - x_A - \frac{1}{R_A} \omega_A) \psi_A, \quad \phi_y = \phi_{yA} - \frac{R_A}{\rho} (y - y_A) \psi_A \quad \text{----- (13)}$$

したがって、式 (6), (8), (10), (11), (13) より、附加荷重は任意な極 A の変位で次のように表わされる；

$$\left. \begin{aligned} g_{xA} &= \frac{1}{R_A^2} \{ (N u_A')' + N R_A \varphi \} - \frac{1}{R_A^2} \{ (M_x \varphi)' - M_x u_A' \} \\ g_{yA} &= \frac{1}{R_A^2} \{ N (v_A' + w_A') \}' + \frac{1}{R_A^2} \{ (M_y \varphi)' - \frac{1}{R_A} M_y u_A' \} - \frac{1}{R_A^2} \{ M_{\omega A} (\varphi' - \frac{1}{R_A} u_A') \}' - \frac{1}{R_A^2} (T_{zA} \varphi)' \\ g_{zA} &= -\frac{1}{R_A^2} \{ Q_y (v_A' + w_A') \}' - \frac{1}{R_A^2} \{ (Q_x u_A')' + R_A Q_x \varphi \} - \frac{1}{R_A^2} \{ T_{zA} (\varphi' - \frac{1}{R_A} u_A') \}' \\ &\quad - \frac{1}{R_A^2} N (v_A' + w_A') - \frac{1}{R_A^2} \{ (M_y \varphi)' - \frac{1}{R_A} M_y u_A' \} + \frac{1}{R_A^2} M_{\omega A} (\varphi' - \frac{1}{R_A} u_A') + \frac{1}{R_A^2} T_{zA} \varphi \\ m_{zA} &= \frac{1}{R_A^2} \{ M_y v_A'' + (M_y w_A')' \} - \frac{1}{R_A^2} M_x (u_A'' + R_A \varphi) + \frac{1}{R_A^2} T_{zA} u_A' \\ &\quad + \frac{1}{R_A^2} \{ (\beta_z N + \beta_x M_x + \beta_y M_y + \beta_{\omega A} M_{\omega A}) (\varphi' - \frac{1}{R_A} u_A') \}' - (g_{xA}^0 e_{xA} + g_{yA}^0 e_{yA}) \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (14)_{a-d}}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_P \frac{R_0}{\rho} \sigma_z dF, \quad M_x = \int_P \frac{R_0}{\rho} \sigma_z y dF, \quad M_y = \int_P \frac{R_0}{\rho} \sigma_z x dF, \quad M_{\omega A} = \int_P \frac{R_A}{\rho} \sigma_z \omega_A dF \\ Q_x &= \int_P \tau_x dF, \quad Q_y = \int_P \tau_y dF, \quad T_{zA} = \int_P \{ \tau_y (x - x_A) - \tau_x (y - y_A) \} dF \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (15)_{a-g}}$$

$$g_{xA}^0 = \int_P \frac{\rho}{R_A} p_x^0 dF, \quad g_{yA}^0 = \int_P \frac{\rho}{R_A} p_y^0 dF, \quad e_{xA} = \frac{1}{g_{xA}^0} \int_P \frac{\rho}{R_A} p_x^0 (x - x_A) dF, \quad e_{yA} = \frac{1}{g_{yA}^0} \int_P \frac{\rho}{R_A} p_y^0 (y - y_A) dF \quad \text{---- (16)_{a-d}}$$

$$\text{さらに, } \beta_z N + \beta_x M_x + \beta_y M_y + \beta_{\omega A} M_{\omega A} = \int_P \frac{R_A}{\rho} \sigma_z \{ (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 - \frac{1}{R_A} \omega_A (x - x_A) \} dF \quad \text{----- (17)}$$

式 (14) および $m_{xA} = m_{yA} = m_{\omega A} = 0$ を表 - 1 のつりあい式の右辺の荷重項に代入すれば、曲線材の一般的座屈問題の支配方程式が得られることになる。

4. おわりに

微小変形の仮定のもとに、薄肉曲線材が任意の荷重を受けた場合の座屈問題の支配方程式を、任意に定めた軸線の変位によって表わした。勿論、従来から扱われてきた曲線材の各種の典型的な座屈問題、たとえば軸圧縮力を受ける円弧アーチの面内、面外座屈、曲率面に垂直な荷重を受ける曲りばりの曲げねじれ座屈等の支配方程式はすべて、ここに得られた一般理論からその特殊なケースとして容易に誘導し得る。なお、(1)~(3) で附加荷重として得られる $m_{xA}, m_{yA}, m_{\omega A}$ については、その影響は一般に極めて微小であるから、ここでは無視した。

参考文献 1) 深沢：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集 第110号，'64-10
2) 深沢：薄肉多角開断面曲りばりの曲げねじれ問題，土木学会論文報告集投稿中 3) 事口，中井：変形を考慮した曲線部材の力学的性状に関する基礎的研究，土木学会年次学術講演会概要集，'72-10